1 Étude des variations d'une fonction

Soit la fonction $f : x \mapsto (6-x)\sqrt{x}$ définie sur $[0;6]$. f est dérivable sur l'intervalle $]0;6]$.

1. Soit x un réel appartenant à $]0;6]$, démontrer que $f'(x) = \dfrac{6-3x}{2\sqrt{x}}$.
2. En déduire les variations de f sur $[0;6]$.
3. Dresser le tableau de variations de f sur $[0;6]$ en précisant les extrema locaux.
4. On admet qu'on peut déduire du tableau de variations de f sur $[0;6]$, que l'équation $f(x) = 4$ possède deux solutions dans $[0;6]$. Déterminer la solution entière.

On considère la solution α de l'équation $f(x) = 4$ sur $[0;1]$, sur lequel f est strictement croissante.
Dans la suite du TP, on va déterminer un encadrement puis une *valeur approchée*, de α par deux algorithmes : un *algorithme par balayage* et un *algorithme par dichotomie*.
Une valeur approchée x_0 à $0,01$ près est à une distance de la solution exacte α inférieure ou égale à $0,01$ c'est-à-dire telle que $\alpha \in [x_0 - 0,01 ; x_0 + 0,01]$. On remarque que l'intervalle considéré contenant α a pour amplitude $2 \times 0,01$.
Dans les algorithmes par balayage et dichotomie, on recherche un intervalle contenant la solution exacte. En prenant comme valeur approchée le centre de cet intervalle, il suffit donc de déterminer un intervalle d'amplitude inférieure ou égale $2 \times 0,01$ pour avoir une solution approchée à $0,01$ près.

2 Résolution approchée par balayage

Exercice 1 *Implémentation et test de l'algorithme de résolution par balayage*

L'algorithme est simple, on le donne ci-contre pour la recherche d'un intervalle d'amplitude $0,2$ contenant α.
On peut l'adapter facilement, il suffit d'avoir localisé un intervalle contenant la solution ciblée (ici $[0;1]$), de s'assurer que la fonction f est strictement monotone sur cet intervalle et de modifier le pas (égal à l'amplitude de l'encadrement souhaité). Attention, il faut anticiper le nombre d'itérations maximal pour qu'il ne soit pas trop important.

Variables :	a et pas sont des nombres réels.
Initialisation :	Affecter à a la valeur 0.
	Affecter à $\mathtt{pas}$ la valeur $0,2$.
Traitement :	Tant que $f(a) < 4$
	Affecter à a la valeur $a + \mathtt{pas}$.
	Fin de Tant que.
Sortie :	Afficher "Borne inférieure :", $a - pas$.
Sortie :	Afficher "Borne supérieure :", a.

1. Implémenter cet algorithme avec `Algobox` dans un fichier `TP7-Balayage-eleve.alg`.
2. Exécuter l'algorithme en complétant le tableau ci-dessous. On notera la valeur de la variable a à la fin de chaque itération/tour de boucle.

Instruction	Valeur logique du test $f(a) < 2$ avant l'itération	Variable a en fin d'itération
Initialisation : $1 \to a$	Pas de test	0
Itération de boucle 1 : $a + \mathtt{pas} \to a$	VRAI car $f(0) < 4$	0,2
Itération de boucle 2 : $a + \mathtt{pas} \to a$	VRAI car $f(0,2) < 4$	0,4
...		
...		
...		
...		

3. Quel encadrement de α est affiché par l'algorithme ci-dessus ? Comment pourrait-on modifier l'algorithme pour obtenir par balayage, un encadrement de α d'amplitude $0,01$?

3 Résolution approchée d'équation par dichotomie

Exercice 2 *Implémentation et test de l'algorithme de résolution par dichotomie*

Le nom dichotomie provient du grec ancien tomia, couper et dikha, en deux.

Le but de cet exercice est de déterminer une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de α avec un algorithme de dichotomie. On donne l'algorithme ci-dessous.

```
Variables :       a, b et m sont des nombres réels.
Initialisation :  Affecter à a la valeur 0.
                  Affecter à b la valeur 1.
Traitement :      Tant que b − a > 0,02
                     | Affecter à m la valeur 1/2 (a + b).
                     | Si f(m) > 4 alors Affecter à b la valeur m.
                     | Sinon Affecter à a la valeur m.
                     | Fin de Si.
                  Fin de Tant que.
Sortie :          Afficher (a + b)/2.
```

1. Implémenter cet algorithme avec `Algobox` dans un fichier `TP-Dichotomie-eleve.alg`.
2. Exécuter l'algorithme en complétant le tableau ci-dessous.

   Chaque exécution du corps de la boucle Tant Que constitue une étape où l'état des variables est relevé à la fin de l'itération, après l'exécution de l'instruction conditionnelle. Pour a et b il s'agit donc des valeurs en sortie de boucle et non des valeurs en entrée de boucle. Le corps de la boucle Tant Que s'exécute six fois.

	initialisation	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5	étape 6
m	$\emptyset$	$0,5$					
a	0						
b	1						
$b-a$	1						

3. Pourquoi peut-on dire que la valeur affichée en sortie par l'algorithme est une valeur approchée de α à $0,01$ près ?
4. Comment faut-il modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche une valeur approchée de α à 10^{-3} près ? Combien de tours de boucle sont-ils alors nécessaires ?