Angles et trigonométrie
Corrigés d'exercices

Première S 634

Frédéric Junier [1]

Lycée du Parc, Lyon

1. http://frederic-junier.org/

Plan

Mesure principale d'un angle orienté

Propriétés des angles orientés

Equations ou inéquations trigonométriques

Exercices Top Chrono

Exercice 71 page 180

$\alpha = \dfrac{97\pi}{6}$.

- $\dfrac{\alpha}{2\pi} = \dfrac{97}{12} \approx 8$;
- $\alpha - 8 \times 2\pi = \dfrac{97\pi}{6} - \dfrac{96\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6}$;
- La mesure principale de $\alpha = \dfrac{97\pi}{6}$ est donc $\boxed{\dfrac{\pi}{6}}$.

Exercice 72 page 180 Question a)

$\alpha = \dfrac{72\pi}{5}$.

- $\dfrac{\alpha}{2\pi} = \dfrac{72}{10} \approx 7$;
- $\alpha - 7 \times 2\pi = \dfrac{72\pi}{5} - \dfrac{70\pi}{5} = \dfrac{2\pi}{5}$;
- La mesure principale de $\alpha = \dfrac{97\pi}{6}$ est donc $\boxed{\dfrac{2\pi}{5}}$.

Exercice 72 page 180 Question a)

$\alpha = \dfrac{72\pi}{5}$.

- $\dfrac{\alpha}{2\pi} = \dfrac{72}{10} \approx 7$;
- $\alpha - 7 \times 2\pi = \dfrac{72\pi}{5} - \dfrac{70\pi}{5} = \dfrac{2\pi}{5}$;
- La mesure principale de $\alpha = \dfrac{97\pi}{6}$ est donc $\boxed{\dfrac{2\pi}{5}}$.

Exercice 72 page 180 Question a)

$\alpha = \dfrac{72\pi}{5}$.

- $\dfrac{\alpha}{2\pi} = \dfrac{72}{10} \approx 7$;
- $\alpha - 7 \times 2\pi = \dfrac{72\pi}{5} - \dfrac{70\pi}{5} = \dfrac{2\pi}{5}$;
- La mesure principale de $\alpha = \dfrac{97\pi}{6}$ est donc $\boxed{\dfrac{2\pi}{5}}$.

Exercice 72 page 180 Question b)

$\alpha = 2015\pi$.

- $2015\pi = \pi + 2 \times 1012\pi$;
- La mesure principale de $\alpha = 2015\pi$ est donc $\boxed{\pi}$.

Plan

Mesure principale d'un angle orienté

Propriétés des angles orientés

Equations ou inéquations trigonométriques

Exercices Top Chrono

Exercice 64 page 180

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ des vecteurs non nuls tels que :

$$\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{v}\right)=-\frac{\pi}{3}+k2\pi \quad \left(\overrightarrow{v}\,,\,\overrightarrow{w}\right)=\frac{7\pi}{6}+k2\pi$$

- $\left(\overrightarrow{u}\,,-\overrightarrow{v}\right)=\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{v}\right)+\pi=\frac{2\pi}{3}+k2\pi$;
- $\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{w}\right)=\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{v}\right)+\left(\overrightarrow{v}\,,\,\overrightarrow{w}\right)=\frac{5\pi}{6}+k2\pi$;
- $\left(5\overrightarrow{v}\,,3\overrightarrow{w}\right)=\left(5\overrightarrow{v}\,,\overrightarrow{v}\right)+\left(\overrightarrow{v}\,,\,\overrightarrow{w}\right)+\left(\overrightarrow{w}\,,3\overrightarrow{w}\right)=$ $0+\frac{7\pi}{6}+0+k2\pi$;
- $\left(-\overrightarrow{w}\,,-\overrightarrow{u}\right)=\left(-\overrightarrow{w}\,,\overrightarrow{w}\right)+\left(\overrightarrow{w}\,,\,\overrightarrow{u}\right)+\left(\overrightarrow{u}\,,-\overrightarrow{u}\right)=$ $\pi+\left(\overrightarrow{w}\,,\,\overrightarrow{u}\right)+\pi=\left(\overrightarrow{w}\,,\,\overrightarrow{u}\right)+2\pi=-\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{w}\right)+2\pi=$ $-\frac{5\pi}{6}+k2\pi$.

Une nouvelle propriété

Dans les questions c) et d) de l'exercice 64, on a mis en évidence une nouvelle propriété des angles orientés.

Theorem

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des vecteurs non nuls et λ et μ des réels non nuls.

- *Si λ et μ sont de même signe alors* $\left(\lambda\overrightarrow{u},\mu\overrightarrow{v}\right)=\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)+k2\pi$;
- *Si λ et μ sont de signes opposés alors* $\left(\lambda\overrightarrow{u},\mu\overrightarrow{v}\right)=\pi+\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)+k2\pi$.

Exercice 65 page 180

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ des vecteurs non nuls tels que :

$$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = \frac{47\pi}{9} + k2\pi \quad \left(\overrightarrow{u}, 3\overrightarrow{w}\right) = -\frac{88\pi}{9} + k2\pi$$

- $\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}\right) = -\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) + \pi = -\frac{47\pi}{9} + k2\pi$;
- $\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right) = \left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}\right) + \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right) = -\frac{47\pi}{9} - \frac{88\pi}{9} + k2\pi = -\frac{135\pi}{9} + k2\pi = -15\pi + k2\pi$.
- On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires.

Exercice 66 page 180

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ des vecteurs non nuls tels que :

$$\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{v}\right)=\frac{\pi}{6}+k2\pi \quad \left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{w}\right)=\frac{\pi}{12}+k2\pi$$

- $\left(\overrightarrow{u}\,,-\overrightarrow{v}\right)=\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{v}\right)+\pi=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\,;$
- $\left(\overrightarrow{u}\,,3\overrightarrow{u}\right)=\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{u}\right)=k2\pi\,;$
- $\left(\overrightarrow{v}\,,\,\overrightarrow{w}\right)=\left(\overrightarrow{v}\,,\,\overrightarrow{u}\right)+\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{w}\right)=$ $-\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{v}\right)+\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{w}\right)=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}+k2\pi=-\frac{\pi}{12}+k2\pi\,;$
- $\left(-2\overrightarrow{w}\,,-5\overrightarrow{v}\right)==\left(\overrightarrow{w}\,,\,\overrightarrow{v}\right)=-\left(\overrightarrow{v}\,,\,\overrightarrow{w}\right)=\frac{\pi}{12}+k2\pi.$

Exercice 67 page 180 Partie (1/2)

Soit $ABCD$ un quadrilatère.

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) + \left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}\right) + \left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}\right) + \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) + \left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CD}\right) + \left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}\right) + \left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AB}\right)$$

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) + \left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}\right) + \left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}\right) + \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) + \left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}\right) + \left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AB}\right)$$

Exercice 67 page 180 Partie (2/2)

$$\left(\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{DA}\,,\,\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{CD}\,,\,\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{BC}\,,\,\overrightarrow{BA}\right)=\left(\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{CB}\,,\,\overrightarrow{AB}\right)$$

$$\left(\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{DA}\,,\,\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{CD}\,,\,\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{BC}\,,\,\overrightarrow{BA}\right)=\left(\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AB}\right)=k2\pi$$

On a appliqué trois fois de suite la relation de Chasles pour retrouver que la somme des mesures des angles internes à un quadrilatère mesure 2π radians soit 360 degrés au signe près.

Plan

Mesure principale d'un angle orienté

Propriétés des angles orientés

Equations ou inéquations trigonométriques

Exercices Top Chrono

Exercice 101 page 182

$$\cos(x) = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \frac{3\pi}{4} + k'2\pi, k' \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

L'équation a deux solutions dans $]-\pi\,;\,\pi]$:

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{3\pi}{4}\,;\,\frac{3\pi}{4}\right\}}$$

Exercice 102 page 182

$$\sin(x) = \sin\left(-\frac{3\pi}{5}\right) \iff \left\{\begin{array}{c} x = -\frac{3\pi}{5} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{-3\pi}{5} + k'2\pi, k' \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{c} x = -\frac{3\pi}{5} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \frac{8\pi}{5} + k'2\pi, k' \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

L'équation a deux solutions dans $[0\,;\,2\pi[$:

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{7\pi}{5} = -\frac{3\pi}{5} + 2\pi\,;\ \frac{8\pi}{5}\right\}}$$

Exercice 103 page 182

$$\cos(x) = \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) \iff \left\{ \begin{array}{c} x = \dfrac{4\pi}{7} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{4\pi}{7} + k'2\pi, k' \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

L'équation a deux solutions dans $]0\,;\,2\pi]$:

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \frac{4\pi}{7}\,;\, -\frac{4\pi}{7} + 2\pi = \frac{10\pi}{7} \right\}}$$

Exercice 104 page 182 Partie 1 / 2

$$2\sin(x) + 1 = 0 \iff \sin(x) = -\frac{1}{2}$$

$$\iff \sin(x) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi - \dfrac{-\pi}{6} + k'2\pi, k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k'2\pi, k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Exercice 104 page 182 Partie 2 / 2

L'équation $2\sin(x)+1=0$ a deux solutions dans $[0\,;\,2\pi[$:

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{\frac{7\pi}{6}\,;\,-\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{11\pi}{6}\right\}}$$

L'équation $2\sin(x)+1=0$ a deux solutions dans $[2\pi\,;\,4\pi[$:

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{2\pi+\frac{7\pi}{6}=\frac{19\pi}{6}\,;\,-\frac{\pi}{6}+4\pi=\frac{23\pi}{6}\right\}}$$

Exercice 105 page 182

$$\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{c} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{3} + k'2\pi, k' \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

L'équation a deux solutions dans $[0\,;\,\pi]$:

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{2\pi}{3}\right\}}$$

Exercice 106 page 182

$$\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{6} + k'2\pi, k' \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

L'équation a deux solutions dans $[0\,;\,2\pi[$:

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{6}\,;\, -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6} \right\}}$$

Plan

Mesure principale d'un angle orienté

Propriétés des angles orientés

Equations ou inéquations trigonométriques

Exercices Top Chrono

Exercice 124 page 183 Question a)

$\alpha = \dfrac{31\pi}{4}$.

- $\dfrac{\alpha}{2\pi} = \dfrac{31}{8} \approx 4$;
- $\alpha - 4 \times 2\pi = -\dfrac{\pi}{4}$;
- La mesure principale de $\alpha = \dfrac{97\pi}{6}$ est donc $\boxed{-\dfrac{\pi}{4}}$.

Exercice 124 page 183 Question b)

$\alpha = -\dfrac{111\pi}{2}$.

- $\dfrac{\alpha}{2\pi} = -\dfrac{111}{4} \approx -28$;
- $\alpha - (-28) \times 2\pi = \dfrac{\pi}{2}$;
- La mesure principale de $\alpha = -\dfrac{111\pi}{2}$ est donc $\boxed{\dfrac{\pi}{2}}$.

Exercice 124 page 183 Question c)

$\alpha = \dfrac{97\pi}{5}$.

- $\dfrac{\alpha}{2\pi} = \dfrac{97}{10} \approx 10$;
- $\alpha - 10 \times 2\pi = -\dfrac{3\pi}{5}$;
- La mesure principale de $\alpha = \dfrac{97\pi}{5}$ est donc $\boxed{-\dfrac{3\pi}{5}}$.

Exercice 125 page 183

- $\left(\overrightarrow{KN}\ ,\ \overrightarrow{KM}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi\,;$
- $\left(\overrightarrow{PN}\ ,\ \overrightarrow{MQ}\right) = \left(\overrightarrow{PN}\ ,-\overrightarrow{PN}\right) = \pi + k2\pi\,;$
- $\left(\overrightarrow{KP}\ ,\ \overrightarrow{NQ}\right) = \left(\overrightarrow{KP}\ ,\ \overrightarrow{KQ}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi.$

Exercice 126 page 183 Partie 1 / 2

On pose $\cos\dfrac{\pi}{5} = m$.

1. On a $\left(\cos\dfrac{\pi}{5}\right)^2 + \left(\sin\dfrac{\pi}{5}\right)^2 = 1$ donc
   $\left(\sin\dfrac{\pi}{5}\right)^2 = 1 - \left(\cos\dfrac{\pi}{5}\right)^2 = 1 - m^2$.
   De plus on a $\dfrac{\pi}{5} \in [0\,;\,\pi]$ donc $\sin\dfrac{\pi}{5} \geqslant 0$.
   On en déduit que : $\boxed{\sin\dfrac{\pi}{5} = \sqrt{1-m^2}}$
2. On a $\dfrac{4\pi}{5} = \pi - \dfrac{\pi}{5}$, on en déduit que :

$$\boxed{\cos\frac{4\pi}{5} = -\cos\frac{\pi}{5} = -m \text{ et } \sin\frac{4\pi}{5} = \sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{1-m^2}}$$

Exercice 126 page 183 Partie 2 / 2

On pose $\cos\dfrac{\pi}{5} = m$, on a établi que $\sin\dfrac{\pi}{5} = \sqrt{1-m^2}$.

1. On a $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{5} = \dfrac{3\pi}{10}$ et $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{5} = \dfrac{7\pi}{10}$.
2. On en déduit que :

$$\boxed{\cos\frac{3\pi}{10} = \sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{1-m^2} \text{ et } \sin\frac{7\pi}{10} = \cos\frac{\pi}{5} = m}$$

Exercice 127 page 183

$$2\sin(x)+\sqrt{3}=0 \iff \sin(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\iff \sin(x)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\iff \begin{cases} x=\dfrac{-\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x=\pi-\dfrac{-\pi}{3}=\dfrac{4\pi}{3}+k'2\pi, k'\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

L'équation a deux solutions dans $]-\pi\,;\,\pi]$:

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{\frac{-\pi}{3}\,;\,\frac{4\pi}{3}-2\pi=-\frac{2\pi}{3}\right\}}$$

Exercice 128 page 183

Soit x un réel.

a. $\sin(7\pi + x) = \sin(3 \times 2\pi + \pi + x) = \sin(\pi + x) = -\sin x$

b. $\cos(130\pi + x) = \cos(2 \times 65\pi + x) = \cos(x)$

c.

$$\sin(x - \frac{7\pi}{2}) = \sin(x - 2\pi - \pi - \frac{\pi}{2}) = \sin(x - \pi - \frac{\pi}{2}) =$$

$$= -\sin(\pi + \frac{\pi}{2} - x) = (-1) \times (-1) \times \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$$