Exercice 119 p. 185

Première S

Frédéric Junier

Lycée du Parc, Lyon

- **Q1 a)** Le nombre de bactéries est croissant sur la période de 2 heures et semble atteindre un maximum de 20 millions au bout de deux heures.
- **Q1 b)** $f'(1,5)$ est le coefficient directeur de la tangente T_A passant par A et G :

$$f'(1,5) = \frac{y_G - y_A}{x_G - x_A}$$
$$f'(1,5) = \frac{22,25 - 2}{2} = 10,125$$

- **Q1 b)** $f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente T_E qui est parallèle à l'axe des abscisses donc $f'(2) = 0$.

On admet que $f(t) = -4,5t^3 + 13,5t^2 + 2$.
f est définie et dérivable sur $[0\,;\,2]$ comme somme de fonctions dérivables sur $[0\,;\,2]$.

- **Q2 a)** Pour tout $t \in [0\,;\,2]$ on a $f'(t) = -13,5t^2 + 27t$.
- **Q2 b)** On retrouve alors que $f'(1,5) = 10,125$ et que $f'(2) = 0$.

- **Q3 a)** Pour tout $t \in [0\,;\,2]$, $f'(t) = -13,5t^2 + 27t$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse t.
- **Q3 b)** Deux tangentes sont parallèles si et seulement si leurs coefficients directeurs sont égaux.

$$f'(t) = f'(1,5) \iff -13,5t^2 + 27t = 10,125$$

En résolvant cette équation du second degré on trouve deux solutions

$$f'(t) = f'(1,5) \iff t = 0,5 \text{ ou } t = 1,5$$

- **Q3 b)** Il existe donc deux tangentes parallèles à T_A : T_A elle-même et la tangente au point d'abscisse $0,5$.
- **Q3 c)** La vitesse d'évolution du nombre de bactéries est identique aux instants $t = 0,5$ et $t = 1,5$.

Question 4 1/3

- **Q4 a)** Equation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 :

$$y = f'(1) \times (x-1) + f(1) \Longleftrightarrow y = 13,5(x-1) + 11$$
$$y = f'(1) \times (x-1) + f(1) \Longleftrightarrow y = 13,5x - 2,5$$

- **Q4 b)** Avec la calculatrice, on conjecture que $\mathcal{C}$ est au-dessus de T sur $[0\,;\,1[$ et $\mathcal{C}$ est en dessous de T sur $]1\,;\,2]$.
- **Q4 b)** On en déduit que la vitesse de croissance de la population augmente sur $[0\,;\,1]$ et diminue sur $[1\,;\,2]$. f' est donc croissante sur $[0\,;\,1]$ et décroissante sur $[1\,;\,2]$ tout en restant positive, ce qui maintient la population f croissante sur $[0\,;\,2]$.

Question 4 2/3

- **Q4 d)** Pour tout $t \in [0\,;\,2]$ on a :

$$(t-1)^3 = (t-1)^2(t-1)$$
$$(t-1)^3 = (t^2-2t+1)(t-1)$$
$$(t-1)^3 = t^3-3t^2+3t-1$$

On en déduit que pour tout $t \in [0\,;\,2]$ on a :

$$f(t)-(13,5t-2,5) = -4,5(t-1)^3$$

Question 4 3/3

- **Q4 e)** Pour tout $t \in [0\,;\,2]$ on a, $(t-1)^3 = (t-1)^2(t-1)$ avec $(t-1)^2 \geqslant 0$ et qui s'annule uniquement en 1. On en déduit que $(t-1)^3$ est du signe de $t-1$ et que $f(t) - (13,5t - 2,5) = -4,5(t-1)^3$ est du signe de $-(t-1) = 1-t$.
- **Q4 e)** On retrouve ainsi que :
  - $f(t) - (13,5t - 2,5) > 0$ sur $[0\,;\,1[$ et que $\mathcal{C}$ est au-dessus de T sur $[0\,;\,1[$
  - $f(t) = (13,5t - 2,5)$ pour $t = 1$ et que $\mathcal{C}$ et T ont un point de contact au point $(1\,;\,11)$, normal ...
  - $f(t) - (13,5t - 2,5) < 0$ sur $]1\,;\,2]$ et que $\mathcal{C}$ est en dessous de T sur $]1\,;\,2]$