Echantillonnage
Intervalle de fluctuation exact

Première S 634

Frédéric Junier[1]

Lycée du Parc, Lyon

1. http://frederic-junier.org/

Intervalle de fluctuation exact au seuil de 95 %

Soit une variable aléatoire X_n suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$ mesurant le nombre de succès sur un échantillon de taille n c'est-à-dire le nombre d'apparition d'un caractère de proportion p dans la population totale.

L'**intervalle de fluctuation exacte** au seuil de 95% pour la variable aléatoire fréquence $\dfrac{X_n}{n}$ mesurant la fréquence de succès dans l'échantillon de taille n est $\left[\dfrac{a}{n}\,;\,\dfrac{b}{n}\right]$ où :

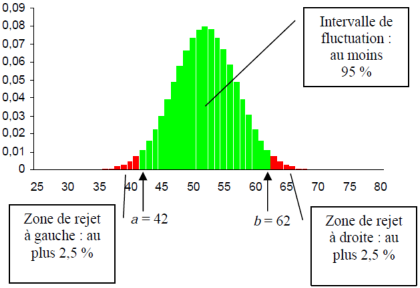
- a est le plus petit entier tel que $\mathrm{P}(X_n \leqslant a) > 0,025$;
- b est le plus petit entier tel que $\mathrm{P}(X_n \leqslant b) \geqslant 0,975$.

On détermine a et b avec un algorithme dont on donne ci-après une implémentation pour calculatrices TI ou Casio. Une autre implémentation est donnée ensuite, elle est plus rapide car le calcul de $\mathrm{P}(X_n \leqslant k)$ n'est pas reprise à chaque itération.

Exemple d'utilisation d'un intervalle de fluctuation exact au seuil de 95% dans un test d'hypothèse.

4. On considère que l'affirmation de Monsieur Z est exacte.

X suit la loi $\mathscr{B}(100\ ;\ 0{,}52)$

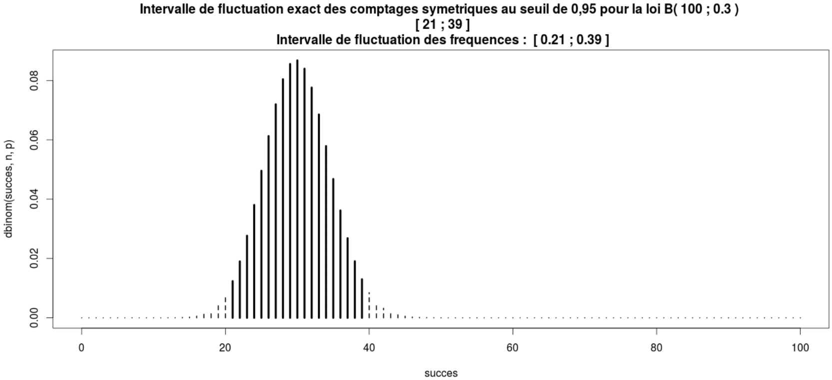


Remarque : la recherche de l'intervalle de fluctuation peut-être illustrée par le diagramme en bâtons de la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}52$.

Exemple d'application

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}\,(100\ ;\ 0,3)$.
Pour la variable aléatoire fréquence $\dfrac{X}{100}$, le programme ci-après donne l'intervalle de fluctuation exact au seuil de 95% :

$$\left[\frac{21}{100}\,;\,\frac{39}{100}\right]$$


Intervalle de fluctuation exact des comptages symetriques au seuil de 0,95 pour la loi B(100 ; 0.3)
[21 ; 39]
Intervalle de fluctuation des frequences : [0.21 ; 0.39]
dbinom(succes, n, p)
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0
20
40
60
80
100
succes

Intervalle de fluctuation exact, programme TI

Programme TEXAS

```
Prompt N
Prompt P
0→ K
While binomFRep(N,P,K)⩽ 0.025
K+1→K
End
Disp K
While binomFRep(N,P,K)< 0.975
K+1→K
End
Disp K
```

Intervalle de fluctuation exact, programme CASIO

```
Programme CASIO
?→ N
?→ P
0→ K
While binominalCD(K,N,P)⩽ 0.025
K+1→K
WhileEnd
K ◢
While binominalCD(K,N,P)⩽ 0.975
K+1→K
WhileEnd
K ◢
```

Intervalle de fluctuation exact, programme TI n° 2 Partie 1

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
PROGRAM:IFE
:Prompt N,P
:0→K
:binomFdp(N,P,K)→C
:While C≤0.025
:K+1→K
:binomFdp(N,P,K)+C→C
:End
:Disp K
:While C<0.975
```

Intervalle de fluctuation exact, programme TI n° 2 Partie 2

La deuxième partie commence à la première ligne après le `while`.

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
PROGRAM:IFE
:K+1→K
:binomFdp(N,P,K)+C→C
:End
:Disp K
:While C<0.975
:K+1→K
:binomFdp(N,P,K)+C→C
:End
:Disp K
```

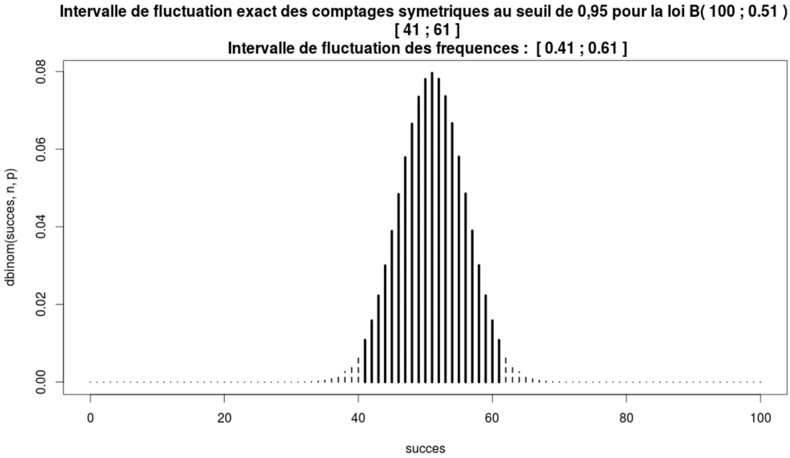
Exemple d'application

Dans une maternité, on admet qu'il naît en moyenne 51 % des garçons. On fait le point sur la proportion de garçons toutes les 100 naissances.

La variable aléatoire X donnant le nombre de garçons dans un échantillon de 100 naissances, suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,51$, car nous sommes en présence d'une répétition de 100 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes dont la probabilité de succès (naissance d'un garçon) est de $= 0,51$.

Le programme réalisé à l'exemple 1 retourne l'intervalle de fluctuation exact au seuil de 95% pour la fréquence $\dfrac{X}{100}$ de garçons dans un échantillon de taille $n = 100$:

$$\left[\frac{41}{100} ; \frac{61}{100}\right]$$


Intervalle de fluctuation exact des comptages symetriques au seuil de 0,95 pour la loi B(100 ; 0.51)
[41 ; 61]
Intervalle de fluctuation des frequences : [0.41 ; 0.61]
dbinom(succes, n, p)
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0
20
40
60
80
100
succes