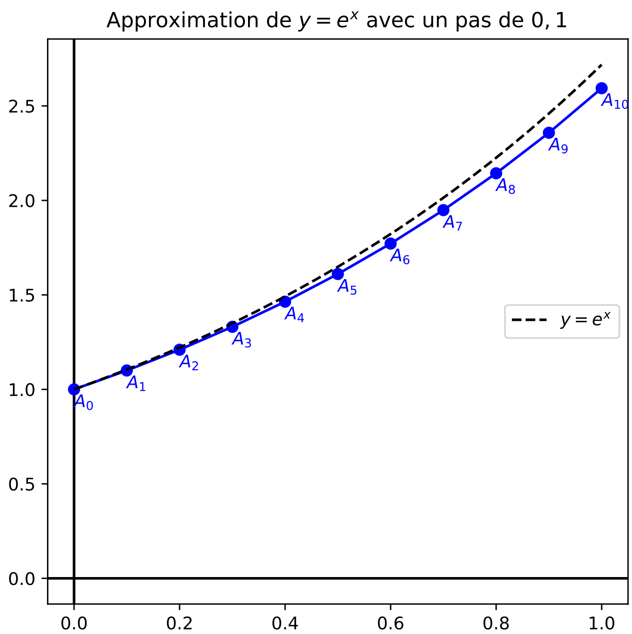
On suppose qu'il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

Cette fonction f s'appelle **fonction exponentielle**.
Une méthode introduite par Leonhard Euler (1707-1783) permet de déterminer une suite de valeurs approchées de f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ et d'approcher la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction exponentielle par une ligne brisée.

1 Méthode d'Euler avec un pas de $1/10$



À partir de $x_0 = 0$, on choisit régulièrement des abscisses $x_k = \dfrac{k}{10}$ avec un pas de $\dfrac{1}{10}$ jusqu'à $x_{10} = 1$. En chaque abscisse x_k de la subdivision on va déterminer une valeur approchée y_k de $f(x_k)$. La ligne brisée reliant les points A_k de coordonnées $(x_k\,;\,y_k)$ avec $0 \leqslant k \leqslant 10$ constituera une approximation de $\mathscr{C}_f$.
On initialise la méthode avec le point exact A_0 de coordonnées $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$.

1. **Itération 1 :** On détermine y_1 à partir de y_0.

   a. Déterminer une équation de la tangente T_0 à $\mathscr{C}_f$ au point A_0.

   b. Justifier que $f(x_0) + 0,1 f'(x_0)$ est l'ordonnée du point d'abscisse $x_1 = x_0 + 0,1$ de T_0.

Par définition du nombre dérivé, on a $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ et donc pour une petite valeur de h, comme $h = 0,1$, on peut écrire que $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0 + 0,1) - f(x_0)}{0,1}$.
On a donc $f(x_1) = f(x_0 + 0,1) \approx f(x_0) + 0,1 f'(x_0)$.
De plus $f'(x_0) = f(x_0)$ et $f(x_0) = y_0$ par définition de la fonction exponentielle, donc : $f(x_1) \approx (1 + 0,1)\,y_0$.
On choisit donc $\boxed{y_1 = (1 + 0,1)\,y_0}$ comme approximation de $f(x_1)$ et on approche le point exact de $\mathscr{C}_f$ de coordonnées $(x_1\,;\,f(x_1))$ par le point $A_1\,(x_1\,;\,y_1)$ de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point précédent A_0. L'erreur commise est celle de l'approximation d'une courbe par une tangente.

2. **Itération 2 :** On détermine y_2 à partir de y_1.

   a. Justifier que si $A_1\,(x_1\,;\,y_1)$ appartenait à $\mathscr{C}_f$ alors une équation de la tangente T_1 en ce point serait $y = y_1(x - x_1) + y_1$.

   b. Vérifier que le point d'abscisse $x_2 = x_1 + 0,1$ de T_2 a pour ordonnée $y_2 = (1 + 0,1)\,y_1$.

   On choisit $\boxed{y_2 = (1 + 0,1)\,y_1}$ comme approximation de $f(x_2)$ et on approche le point exact de $\mathscr{C}_f$ de coordonnées $(x_2\,;\,f(x_2))$ par le point d'abscisse $A_2\,(x_2\,;\,y_2)$ d'une fausse tangente à $\mathscr{C}_f$ en un point approché $A_1\,(x_1\,;\,y_1)$. On cumule l'erreur de l'approximation d'une courbe par une tangente avec l'erreur déjà commise en approchant $f(x_1)$ par y_1.

3. **Itération k :** On détermine y_{k+1} à partir de y_k

a. Justifier que si $A_k(x_k\,;\,y_k)$ appartenait à $\mathscr{C}_f$ alors une équation de la tangente T_k en ce point serait $y = y_k(x - x_k) + y_k$.

b. Vérifier que le point d'abscisse $x_{k+1} = x_k + 0,1$ de T_k a pour ordonnée $y_{k+1} = (1+0,1)\,y_k$.

On choisit $\boxed{y_{k+1} = (1+0,1)\,y_k}$ comme approximation de $f(x_{k+1})$ en cumulant l'erreur d'approximation d'une courbe par une tangente avec toutes les erreurs cumulées précédemment.

4. **a.** Compléter le programme `Python` ci-dessous pour qu'en sortie de boucle, la variable `L` contienne la liste $[(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k), \ldots, (x_{10}, y_{10})]$ des coordonnées des points A_k avec $0 \leqslant k \leqslant 10$.

Programme 1

```
x = 0
y = 1
L = [(x, y)]
for k in range(10):
    x = ......
    y = ......
    L.append([x,y])
```

b. Implémenter ce programme et comparer la valeur approchée de $\exp(1)$ ainsi obtenue avec la valeur retournée par une calculatrice dont les huit premières décimales sont exactes.

c. Déterminer un calcul direct de y_{10} la valeur approchée de $\exp(1)$.

2 Méthode d'Euler avec un pas de $1/n$

Méthode

Soit un entier $n \geqslant 1$, à partir de $x_0 = 0$, on choisit régulièrement des abscisses $x_k = \dfrac{k}{n}$ avec un pas de $\dfrac{1}{n}$ jusqu'à $x_n = 1$. En chaque abscisse x_k de la subdivision on va déterminer une valeur approchée y_k de $f(x_k)$. La ligne brisée reliant les points A_k de coordonnées $(x_k\,;\,y_k)$ avec $0 \leqslant k \leqslant n$ constituera une approximation de $\mathscr{C}_f$. On procède ainsi :

- On initialise la méthode avec le point exact A_0 de coordonnées $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$
- Pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$ on itère le procédé de construction suivant :
  - on considère le point approché $A_k(x_k\,;\,y_k)$ précédemment construit comme un point de $\mathscr{C}_f$ et on trace la tangente T_k en ce point ;
  - on choisit comme point suivant le point $A_{k+1}(x_{k+1}\,;\,y_{k+1})$ de T_k d'abscisse $x_{k+1} = x_k + \dfrac{1}{n}$.

1. Justifier que pour tout entier k avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$ on a $y_{k+1} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) y_k$.

2. Écrire en `Python` une fonction `euler(n)` qui retourne la liste $[(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k), \ldots, (x_n, y_n)]$ des coordonnées des points A_k avec $0 \leqslant k \leqslant n$.

3. Utiliser cette fonction avec des valeurs de n variant de 2 à 20 pour calculer des valeurs approchées de $\exp(1)$. Comment évolue la qualité des approximations ?

4. Déterminer un calcul direct en fonction de n de la valeur approchée y_n de $\exp(1)$.