

Histoire 1

Thomas Malthus (1766 – 1834) propose un modèle où la population suit une évolution exponentielle (suite géométrique) et la capacité de production plutôt une évolution linéaire (suite arithmétique) ce qui l'amène à préconiser une limitation des naissances parce que la croissance exponentielle est plus rapide que la croissance linéaire.

1 Évolution linéaire

Définition 1

On considère une grandeur y dont la valeur dépend d'une variable x .

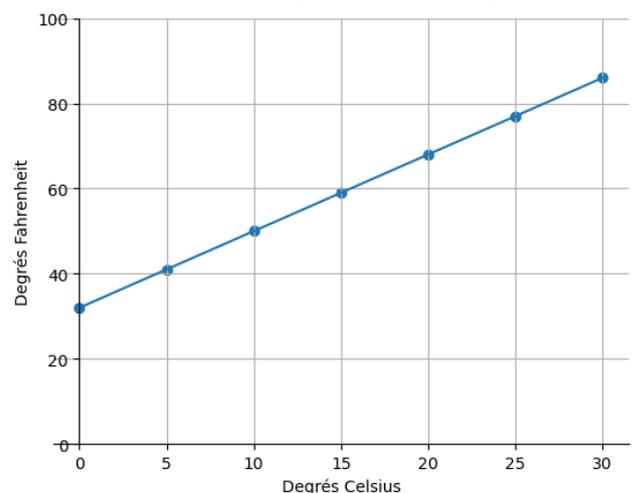
- ☞ y suit une **évolution linéaire** par rapport à x si le taux de variation de y par rapport à x est constant, c'est-à-dire si $\frac{y(b) - y(a)}{b - a}$ est constant pour tous a et b distincts où y est défini
- ☞ Soit y une grandeur qui suit une évolution linéaire par rapport à une variable x :
 - si x prend uniquement des valeurs entières, on dit que y suit une **évolution linéaire discrète** ;
 - si x prend ses valeurs dans un intervalle, on dit que y suit une **évolution linéaire continue**.

Capacité 1 Reconnaître une évolution linéaire et savoir la modéliser

Les degrés Celsius et Fahrenheit sont deux unités de mesure de la température. On a représenté ci-dessous la correspondance entre une mesure en degré Celsius et sa conversion en degrés Fahrenheit correspondante pour une mesure comprise entre 0 et 30 degrés Celsius. Les points sont alignés.

Quelques conversions :

Degrés Celsius	Degrés Fahrenheit
0	32
5	41
10	50
15	59



- De combien augmente la mesure en degrés Fahrenheit si la mesure en degrés Celsius augmente de 5 degrés? de 10 degrés? de 15 degrés? de 1 degré?
- L'évolution de la mesure en Fahrenheit par rapport à la mesure en Celsius vous semble-t-elle linéaire? Si oui s'agit-il d'une évolution linéaire discrète ou continue?

3. Soit x une mesure en Celsius, déterminer une expression de la mesure $f(x)$ en Fahrenheit.

Capacité 2 Reconnaître une évolution linéaire et savoir la modéliser

Un vendeur de logiciel propose un contrat d'assistance de deux ans maximum, comprenant l'installation à domicile et un conseiller joignable par téléphone pour 20 € le premier mois, puis 0,6 € de moins par rapport au mois précédent, et ainsi de suite. On note $v(n)$ la mensualité en euros au $n^{\text{ième}}$ mois.

- Calculer $v(1)$ et $v(2)$.
- Pour tout entier n tel que $1 \leq n \leq 24$, exprimer $v(n+1)$ en fonction de $v(n)$.
- Représenter graphiquement avec le mode Suite de la calculatrice les points de coordonnées $(n; v(n))$ avec n entier tel que $1 \leq n \leq 24$. Quelle est la forme du nuage de points?
- Calculer le montant de la mensualité au 12^{ième} mois et donner sans justifier une formule explicite de $v(n)$ pour tout entier n tel que $1 \leq n \leq 24$.
- L'évolution du montant de la mensualité par rapport au nombre de mois vous semble-t-elle linéaire? Si oui s'agit-il d'une évolution linéaire discrète ou continue?

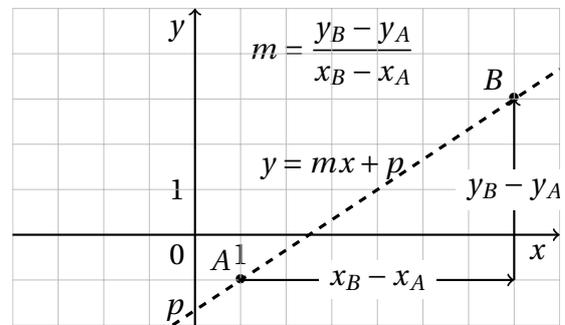
2 Évolution linéaire continue, fonctions affines

Théorème 1

Si une quantité y suit une **évolution linéaire continue** par rapport à une variable x , alors y est une fonction affine de x et on a :

$$y = f(x) = mx + p \text{ avec } \begin{cases} m \text{ coefficient directeur} \\ p \text{ ordonnée à l'origine} \end{cases}$$

Dans un repère l'ensemble des points de coordonnées $(x; y = f(x))$ est la droite d'équation $y = mx + p$.



Théorème 2

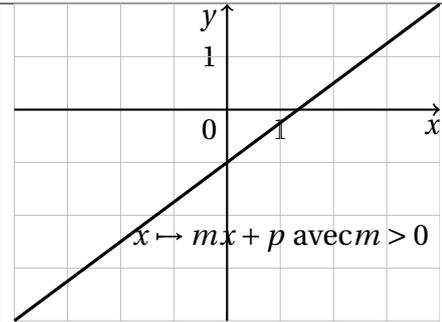
Soit f une fonction affine définie sur \mathbb{R} par $f(x) = mx + p$.

Premier cas : $m > 0$

☞ f est **strictement croissante** sur \mathbb{R} .

☞ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{p}{m}$ et f est négative puis positive

x	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

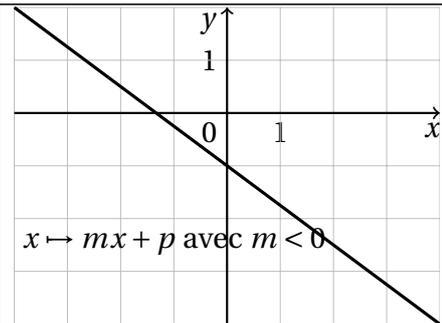


Deuxième cas : $m < 0$

☞ f est **strictement décroissante** sur \mathbb{R} .

☞ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{p}{m}$ et f est positive puis négative

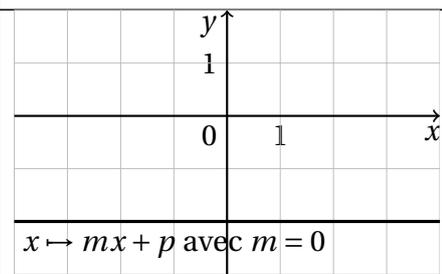
x	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-



Troisième cas : $m = 0$

☞ f est **constante** sur \mathbb{R} , $f : x \mapsto p$.

☞ f est de signe constant, celui de p



☞ Capacité 3 Déterminer le sens de variation d'une fonction affine, résoudre une équation ou une inéquation

1. Soit f la fonction affine définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 40 - 3x$.

a. Déterminer le sens de variation de f sur \mathbb{R} .

b. Résoudre l'inéquation $f(x) < 0$ et en déduire le tableau de signe de f .

2. Soit g une fonction affine telle que $g(0) = 12$ et $g\left(\frac{13}{4}\right) = 24$.

a. g est-elle croissante ou décroissante sur \mathbb{R} ?

b. Calculer son coefficient directeur m et en déduire l'expression de $g(x)$.

c. Résoudre l'inéquation $g(x) \geq 100$.

3 Évolution linéaire discrète, suites arithmétiques

3.1 Définition

Définition 2

Une suite u est **arithmétique** s'il existe un réel r tel que : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u(n+1) = u(n) + r$.
Le réel r est la **raison** de la suite.

Capacité 4 Caractériser une suite arithmétique

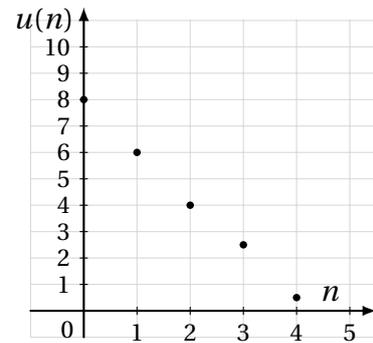
Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est *Vraie* ou *Fausse* en justifiant la réponse.

- **Affirmation 1 :**

La suite u dont on a représenté ci-contre les termes $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$ et $u(3)$ est arithmétique.

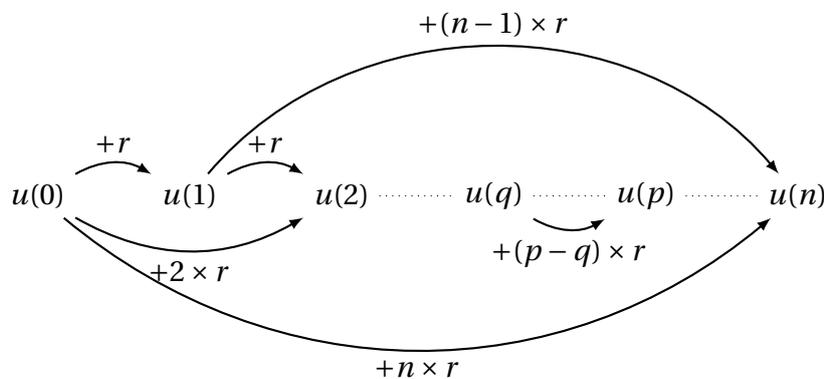
- **Affirmation 2 :**

Si v est une suite arithmétique de raison 3 et telle que $v(1) = -5$ alors $v(6) = 10$.



3.2 Calculs de termes et représentation graphique

Propriété 1



Soit u une suite arithmétique de raison r .

- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u(n) = u(0) + \dots + r$ et $u(n) = u(1) + \dots + r$
- Pour tous entiers $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$, $u(p) = u(q) + \dots + r$.

Une suite arithmétique est entièrement déterminée par la connaissance d'un terme et de sa raison.

Capacité 5 Calculer le terme général d'une suite arithmétique, voir exos 1 et 2 p. 13

1. Soit u une suite arithmétique de raison -3 et de premier terme $u(1) = 10$.

a. Exprimer $u(n+1)$ en fonction de $u(n)$.

b. On utilise un tableur pour calculer les termes de la suite u .

Proposer une formule à écrire en B3 pour calculer $u(2)$; cette formule « tirée vers le bas » dans la colonne devra permettre de calculer les valeurs successives de la suite u .

	A	B
1	n	$u(n)$
2	1	10
3	2	

c. Exprimer $u(n)$ en fonction de n et calculer $u(43)$.

2. Soit (w_n) une suite arithmétique telle que $w(13) = -5$ et $w(17) = 23$.

a. Soit r la raison de cette suite, exprimer $w(17) - w(13)$ en fonction de r . En déduire la valeur de r puis calculer $w(1)$.

b. Exprimer $w(n)$ en fonction de n et calculer $w(50)$.

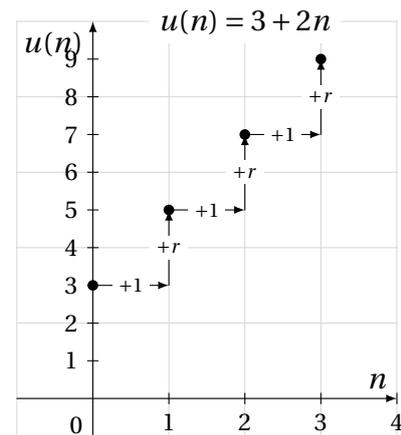
Propriété 2

Une suite u est arithmétique de raison r si et seulement s'il existe deux réels a et r tels que :

$$\text{pour tout entier } n \in \mathbb{N}, \quad u(n) = a + nr$$

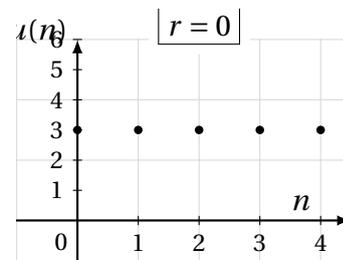
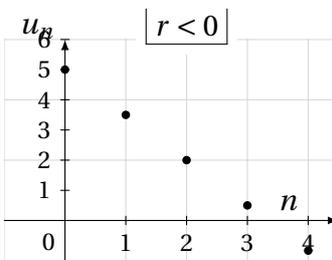
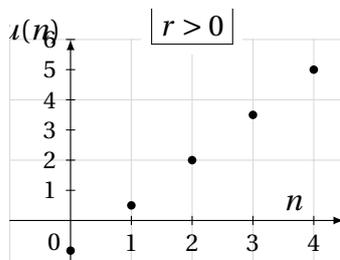
Une suite est arithmétique si et seulement si sa représentation graphique dans un repère est constituée de points alignés.

Une suite arithmétique u modélise une **évolution linéaire discrète** d'une quantité $u(n)$ par rapport à une variable entière n .



3.3 Sens de variation et problème de seuil

Propriété 3 Sens de variation



Soit u une suite arithmétique de raison r .

- u est strictement croissante si $r > 0$.
- u est strictement décroissante si $r < 0$.
- u est constante si $r = 0$.

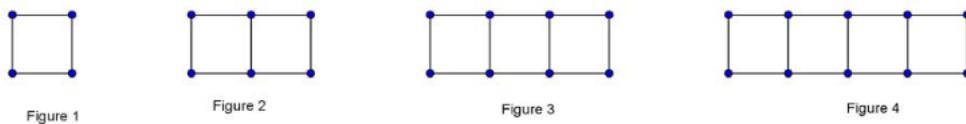
Capacité 6 Déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique

Soit u une suite arithmétique telle que pour tout entier naturel n , on a : $u(n) = 1 - \frac{5-2n}{3}$. Déterminer la raison de u et son sens de variation.

Capacité 7 Modéliser par une suite arithmétique et résoudre un problème de seuil

On considère une suite logique de figures constituées d'allumettes. On donne les quatre premières figures ci-dessous. Chaque nouvelle figure contient un carré de plus que la précédente.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $u(n)$ le nombre d'allumettes utilisées pour construire la figure n . Ainsi on a $u(1) = 4$, $u(2) = 7$, $u(3) = 10$ et $u(4) = 13$.

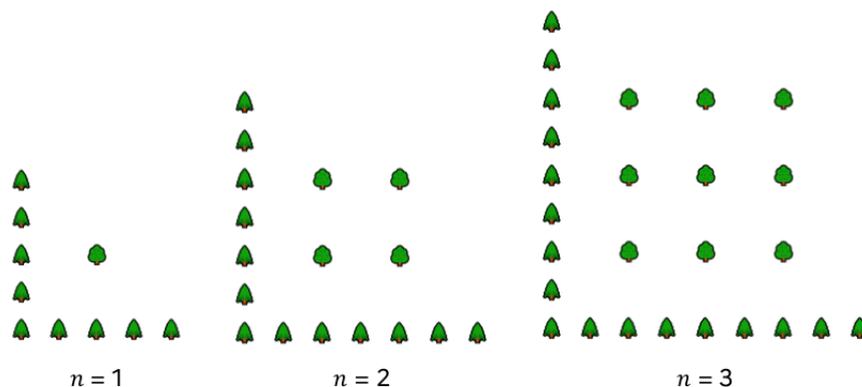


1. Justifier que la suite u est arithmétique et préciser sa raison.
2.
 - a. Combien d'allumettes seront nécessaires pour construire la figure 10?
 - b. Soit n un entier supérieur ou égale à 1, combien d'allumettes seront nécessaires pour construire la figure n ?
 - c. À partir de quelle valeur de l'entier $n \geq 1$ faudra-t-il plus de 1000 allumettes pour construire la figure n ?

Capacité 8 Modéliser par une suite arithmétique et résoudre un problème de seuil

Un fermier plante des pommiers en carré. Afin de protéger ces arbres contre les vents dominants, il plante des conifères sur deux côtés du verger.

On a représenté cette situation ci-dessous, avec la disposition des pommiers et des conifères pour un nombre n de rangées de pommiers compris entre 1 et 3.



1. Combien de conifères seront utiles pour protéger 25 rangées de pommiers?
2. Combien de rangées de pommiers peut-on protéger avec 500 conifères?