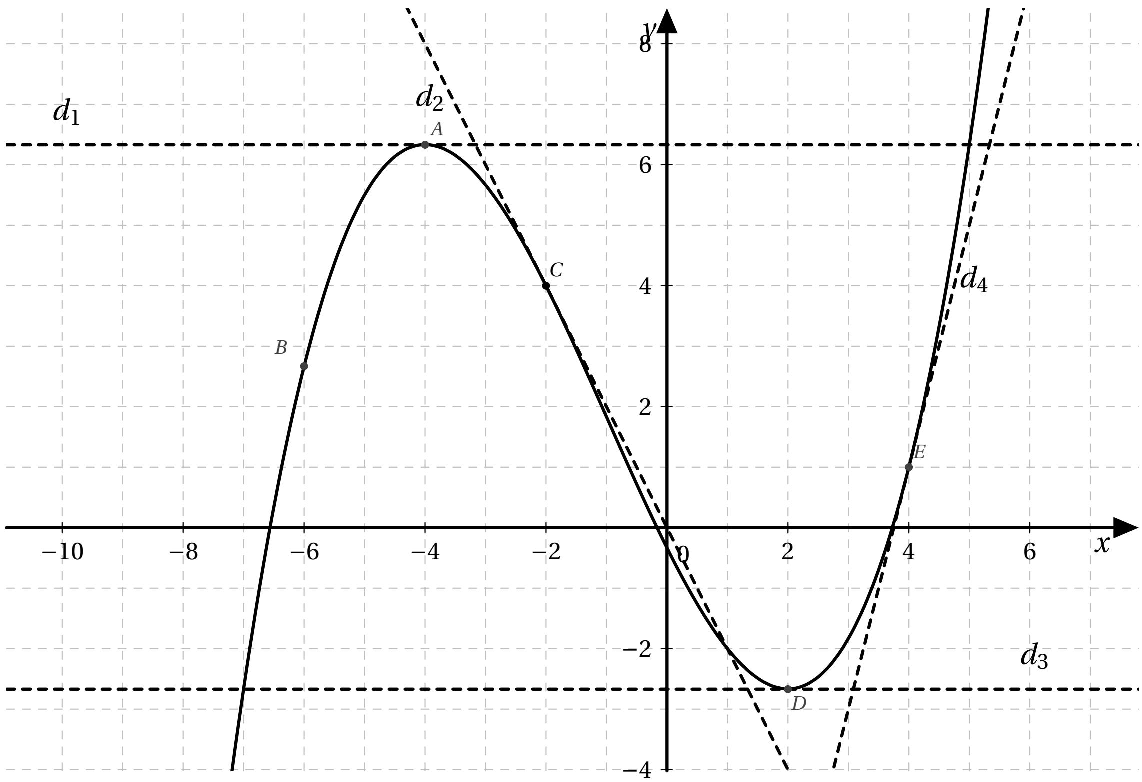
Histoire 1

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) est un mathématicien et physicien français dont les travaux portèrent dans tous les domaines mathématiques. Il nous a laissé en particulier la notation $f'(x)$ pour la fonction dérivée, la notation indicielle u_n pour les suites et le lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation d'une fonction. En arithmétique des entiers, il résolut la difficile équation de Pell $x^2 - ay^2 = \pm 1$ en introduisant les fractions continues. Après avoir succédé à Euler à l'Académie des sciences de Berlin, il siégea dans la commission du système métrique sous la Révolution, il est inhumé au Panthéon.

1 Des propriétés locales de la dérivée aux propriétés globales

Activité 1

Sur la figure ci-dessous, C_f est la courbe représentative d'une fonction f qui admet un nombre dérivée $f'(a)$ pour tout réel a. Les droites d_1, d_2, d_3 et d_4 sont tangentes à la courbe C_f respectivement en A, C, D et E.



Répondre aux questions par lecture graphique.

1. La tangente à la courbe C_f au point C d'abscisse -2 passe par l'origine du repère.
   Déterminer $f'(-2)$ puis l'équation de la tangente d_2.
2. La tangente à la courbe C_f au point E d'abscisse 4 passe par le point de coordonnées $(3\,;-3)$.
   Déterminer $f'(4)$ puis l'équation de la tangente d_4.
3. On admet que f est croissante sur $]-\infty\,;-4]$ et sur $[2\,;+\infty[$. Dresser le tableau de variations de f.

4. Quel est le signe de $f'(0)$? et celui du coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point B ?
Conjecturer le signe de la fonction dérivée f' sur $]-\infty ; -4]$.

2 Fonction dérivable

2.1 Fonction dérivable sur un intervalle

Définition 1
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est dérivable en tout point a de I, on dit que f est dérivable sur I, et on appelle **fonction dérivée** de f, notée f', la fonction f' définie par :

$$\boxed{f' : a \mapsto f'(a)}$$

2.2 Dérivabilité des fonctions affines et puissances

Propriété 1 ***Admise pour les fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x^n$***
Les fonctions affines et puissances sont dérivables sur leurs intervalles de définition.
En particulier si elles sont définies sur $\mathbb{R}$, alors elles sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Fonction f	Fonction dérivée f'
$f : x \mapsto p$ avec p réel	$f' : x \mapsto \ldots\ldots$
$f : x \mapsto x$	$f' : x \mapsto \ldots\ldots$
$f : x \mapsto mx + p$ avec m, p réels	$f' : x \mapsto \ldots\ldots$
$f : x \mapsto x^2$	$f' : x \mapsto \ldots\ldots$
$f : x \mapsto x^3$	$f' : x \mapsto \ldots\ldots$
$f : x \mapsto x^n$ avec n entier naturel	$f' : x \mapsto \ldots\ldots$

Capacité 1 ***Déterminer la fonction dérivée d'une fonction usuelle***
Pour chaque fonction, définie sur $\mathbb{R}$, déterminer sa fonction dérivée et des équations des tangentes à sa courbe aux points d'abscisses -1 et 1.

1. $f : x \mapsto 502$
2. $g : x \mapsto 502x$
3. $h : x \mapsto 502 - x$
4. $j : x \mapsto x^2$
5. $k : x \mapsto x^3$
6. $m : x \mapsto x^{621}$

2.3 Dérivabilité des fonctions polynômes

Propriété 2

1. Si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors la fonction somme $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$, définie par $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} : \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$, est dérivable sur ce même intervalle I.

   Pour tout réel $\boldsymbol{x}$ appartenant à I, on a :

   $$\boxed{(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{v}'(\boldsymbol{x})}$$

   La fonction dérivée d'une somme de fonctions dérivables est la somme des fonctions dérivées.

2. Si $\boldsymbol{u}$ est une fonction dérivable sur un intervalle I et si $\boldsymbol{\lambda}$ est un scalaire c'est-à-dire une constante réelle, alors la fonction $\boldsymbol{\lambda u}$ définie par $\boldsymbol{\lambda u} : \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{\lambda u}(\boldsymbol{x})$ est dérivable sur ce même intervalle I.

   Pour tout réel $\boldsymbol{x}$ appartenant à I, on a :

   $$\boxed{(\boldsymbol{\lambda u})'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\lambda u}'(\boldsymbol{x})}$$

   La fonction dérivée d'un produit d'une fonction dérivable $\boldsymbol{u}$ *par une constante multiplicative* $\boldsymbol{\lambda}$ *est* $\boldsymbol{\lambda}$ *fois la dérivée de* $\boldsymbol{u}$.

3. En combinant les deux propriétés précédentes, on peut déduire que toute combinaison linéaire de fonctions puissances, appelée **fonctions polynômes,** est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Capacité 2 ***Déterminer la fonction dérivée d'une somme de fonctions dérivables***

1. Les fonctions polynômes ci-dessous sont dérivables sur $\mathbb{R}$, déterminer une expression de leur fonction dérivée.

   a. $f_1 : x \mapsto x^2 - 621x + 622$;

   b. $f_2 : x \mapsto x^3 - x^2 + x + 1$;

   c. $f_3 : x \mapsto x^3 + 4x^2 - 2x + 1$;

   d. $f_4 : x \mapsto \dfrac{x^2}{2} - 4(x-1)$.

2. Le coût de production, en centaines d'euros, de x centaines litres d'un produit chimique est modélise par la fonction C définie sur l'intervalle $[0 ; 25]$ par $C(x) = x^3 - 30x^2 + 400x + 100$.

   a. Justifier que la fonction C est dérivable sur $[0 ; 25]$.

   b. Déterminer une expression de sa fonction dérivée C'.

   c. En déduire le coût marginal de production, en euros, de 1 000 litres de produit.

3 Lien entre signe de la dérivée et sens de variation

3.1 Du sens de variation de la fonction au signe de sa dérivée

Théorème 1

Soit f une fonction monotone et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Compléter par $\leqslant$, $=$ *ou* $\geqslant$.

- Si f est croissante sur I alors pour tout $x \in \mathrm{I}$ on a $f'(x) \cdots 0$.
- Si f est décroissante sur I alors pour tout $x \in \mathrm{I}$ on a $f'(x) \cdots 0$.

3.2 Du signe de la dérivée au sens de variation de la fonction

Théorème 2 ***Réciproque du précédent***

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Compléter par $\leqslant$, $=$ *ou* $\geqslant$.

- Si pour tout réel x de I on a $f'(x) \cdots 0$ alors alors f est croissante sur I.
- Si pour tout réel x de I on a $f'(x) \cdots 0$ alors alors f est décroissante sur I.

Capacité 3 ***Exploiter le lien entre signe de la dérivée et sens de variation d'une fonction***

1. On donne le tableau de variations d'une fonction f dérivable sur $[-4\,;30]$, compléter le tableau de signes de sa fonction dérivée f'.

x	-4		5		11		30
$f'(x)$		$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	
$f(x)$	6	$\searrow$	-1	$\nearrow$	18	$\searrow$	12

2. On considère une fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ dont on donne le tableau de signes de sa fonction dérivée g'. Compléter les variations de g et les décrire oralement.

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$							

3.3 Application à l'étude des variations d'une fonction

Méthode

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Pour étudier les variations de f sur I, on procède ainsi :

- ☞ On calcule l'expression de $f'(x)$ et on la factorise.
- ☞ On étudie le signe de $f'(x)$ dans un tableau.
- ☞ Dans le tableau en dessous du bilan de signe de $f'(x)$, on rajoute une ligne avec les variations de f.

Capacité 4 ***Étudier les variations d'une fonction polynôme du second degré***

Soit la fonction g polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$.
On note g' la fonction dérivée de g.

1. Soit x un réel, déterminer une expression de $g'(x)$.
2. Étudier le signe de g' sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire les variations de g sur $\mathbb{R}$.

Capacité 5 ***Étudier les variations d'une fonction polynôme du troisième degré***

Dans le cadre de la célébration de l'amitié franco-américaine, un groupe d'élèves français et américains décide d'organiser une randonnée commune autour du lac d'Annecy, joyau des Alpes françaises.
La hauteur h en mètres, par rapport au niveau de la mer, en fonction de la distance x en kilomètres parcourue depuis le début de leur randonnée autour du lac, est modélisée par la fonction suivante :

$$h(x) = -x^3 + 16,5x^2 - 72x + 550$$

où x appartient à l'intervalle $[0\,;10]$.

1. Justifier que la fonction h est dérivable sur l'intervalle $[0\,;10]$. On note h' sa fonction dérivée.
2. Soit x un réel appartenant à l'intervalle $[0\,;10]$, exprimer $h'(x)$.
3. Montrer que pour tout réel $x \in [0\,;10]$ on a $h'(x) = (-3x+9)(x-8)$.
4. Étudier dans un tableau le signe du produit $h'(x) = (-3x+9)(x-8)$ pour $x \in [0\,;10]$.
5. En déduire les variations de h sur $[0\,;10]$: identifier les points où les randonneurs atteignent le point de vue le plus élevé de leur parcours autour du lac.
6. Calculer les hauteurs maximale et minimale atteintes lors de cette randonnée. On arrondira les résultats au mètre près.