Exercices du manuel sur les limites

Terminale S

Frédéric Junier [1]

Lycée du Parc, Lyon

1. http://frederic-junier.org/

Plan

Question 1 étude de la limite en $+\infty$

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-3\,;\,3\}$ par $f(x) = \frac{-4x^2+1}{x^2-9}$.
En $+\infty$ on a par quotient une forme indéterminée du type $\frac{-\infty}{+\infty}$, donc on change de forme :

$$f(x) = \frac{x^2\left(-4 + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \frac{9}{x^2}\right)} = \frac{-4 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{9}{x^2}}$$

- On a $\lim\limits_{x \to +\infty} -4 + \frac{1}{x^2} = -4\,;$
- On a $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{9}{x^2} = 1\,;$

Donc par quotient on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-4+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{9}{x^2}} = -4$.
On en déduit que la droite d'équation $y = -4$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

Question 1 étude de la limite en $-\infty$

En $-\infty$ on a par quotient une forme indéterminée du type $\frac{-\infty}{+\infty}$, donc on change de forme :

$$f(x) = \frac{x^2\left(-4+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{9}{x^2}\right)} = \frac{-4+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{9}{x^2}}$$

- On a $\lim\limits_{x\to-\infty} -4+\frac{1}{x^2} = -4$;
- On a $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\frac{9}{x^2} = 1$;

Donc par quotient on a $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-4+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{9}{x^2}} = -4$

On en déduit que la droite d'équation $y=-4$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

Question 1 étude de la limite en -3

En -3, la limite du numérateur $-4x^2+1$ est -35 et la limite du dénominateur x^2-9 est 0.
On étudie donc d'abord le signe de $x^2-9=(x-3)(x+3)$ en appliquant la règle du signe d'un trinôme :

- Si $x<-3$ alors $x^2-9>0$;
- Si $-3<x<3$ alors $x^2-9<0$;
- Si $3<x$ alors $x^2-9>0$;

On en déduit qu'il faut raisonner par disjonction des cas.

Question 1 étude de la limite en -3^-

- On a $\lim\limits_{x\to -3} -4x^2+1 = -35$;
- On a $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ x<-3}} x^2-9 = 0^+$;

Par quotient, on a donc $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ x<-3}} \frac{-4x^2+1}{x^2-9} = -\infty$.

On en déduit que la droite d'équation $x=-3$ est asymptote verticale en -3^-.

Question 1 étude de la limite en -3^+

- On a $\lim\limits_{x \to -3} -4x^2 + 1 = -35$;
- On a $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} x^2 - 9 = 0^-$;

Par quotient, on a donc $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} \frac{-4x^2+1}{x^2-9} = +\infty$.

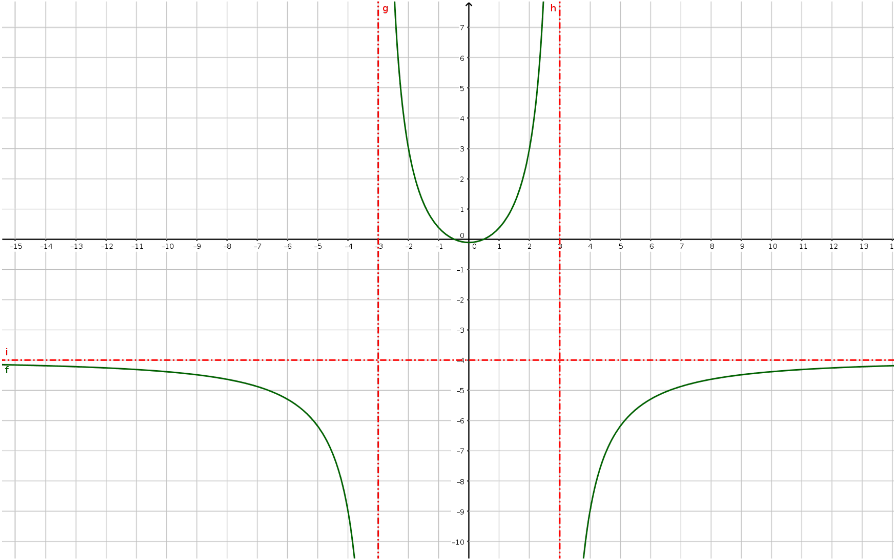
On en déduit que la droite d'équation $x = -3$ est asymptote verticale en -3^+.

Question 3 étude de la position de la courbe par rapport à son asymptote horizontale

Pour étudier la position de la courbe d'équation $y = f(x)$ et de son asymptote horizontale d'équation $y = -4$, il suffit d'étudier le signe de $f(x) - (-4)$.
Pour tout réel x différent de -3 et 3 on a :

$$f(x) - (-4) = \frac{-4x^2 + 1}{x^2 - 9} + \frac{4(x^2 - 9)}{x^2 - 9} = \frac{-35}{x^2 - 9}$$

- Pour tout réel x tel que $x < -3$ ou $x > 3$ on a $x^2 - 9 > 0$ et donc $f(x) - (-4) < 0$, c'est-à-dire que la courbe de f est en-dessous de son asymptote d'équation $y = -4$.
- Pour tout réel x tel que $-3 < x < 3$ on a $x^2 - 9 < 0$ et donc $f(x) - (-4) > 0$, c'est-à-dire que la courbe de f est au-dessus de son asymptote d'équation $y = -4$.


g
h
i
f
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9
−10
−15
−14
−13
−12
−11
−10
−9
−8
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13