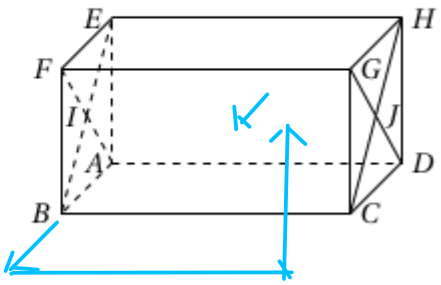
Vecteurs de l'espace
Corrigés des exemples du cours

Capacité 1 ***Prouver des égalités vectorielles***

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle.

1. Déterminer trois vecteurs égaux de la figure égaux au vecteur $\overrightarrow{FE}$.
2. Déterminer l'image du point F par la translation de vecteur $\overrightarrow{GJ}$.
3. Construire l'image K du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AG}$.

   Que peut-on dire des points H, G et K? Justifier.



1) $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{GH}$

2) On a $\overrightarrow{FI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FA}$ car I milieu de [FA]

De plus $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EA}$

et $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{HD}$

car EFGH et EADH sont des parallélogrammes

donc $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{GD}$

Or J milieu de [GD] donc $\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GD}$

On a donc $\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EA})$

$$\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{FI}$$

L'image du point F par la translation de vecteur $\overrightarrow{GJ}$ est donc le point I.

3) On a $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$

Soit K l'image du point B par la transla-

le vecteur $\overrightarrow{AG}$. On a donc :

$$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$$

De $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AG}$ on déduit que ABKG est un parallélogramme et donc que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GK}$

Or $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ car ABCD parallélogramme et $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HG}$ car HGCD parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HG}$

De $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GK}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HG}$, on déduit que :

$$\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{GK}$$

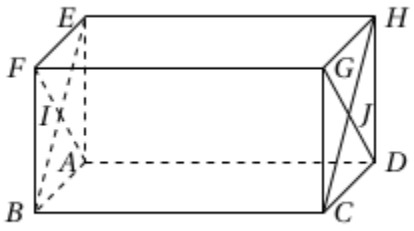
et donc que G milieu de [HK].

Ainsi les points G, H, K sont alignés.

Capacité 2 ***Identifier des vecteurs colinéaires, opposés, égaux***

Dans le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ de la capacité 1 :

1. Déterminer trois vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{FI}$.
2. Déterminer trois vecteurs opposés au vecteur $\overrightarrow{FI}$.
3. Déterminer trois vecteurs colinéaires, de même sens mais pas de même norme que le vecteur $\overrightarrow{FI}$.
4. Déterminer trois vecteurs colinéaires, de sens opposé mais pas de même norme que le vecteur $\overrightarrow{FI}$.



1) Trois vecteurs égaux à $\overrightarrow{FI}$:

$\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{JD}$

2) Trois vecteurs opposés à $\overrightarrow{FI}$:

$\overrightarrow{FI} = -\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{JD} = -\overrightarrow{GJ}$

3) Trois vecteurs colinéaires, de même sens mais pas de même norme que $\overrightarrow{FI}$:

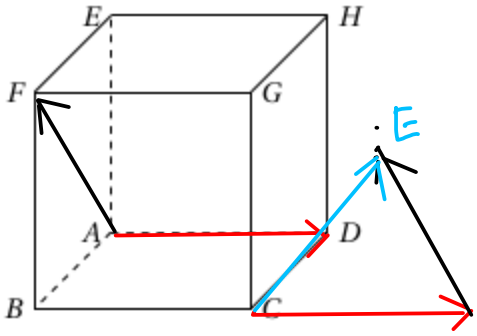
$\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{FA} = 2\overrightarrow{FI}$ et $\frac{3}{2}\overrightarrow{GD}$

4) Trois vecteurs colinéaires, de sens opposé mais pas de même norme que $\overrightarrow{FI}$:

$\overrightarrow{FA} = -2\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{GD} = -2\overrightarrow{IF}$

et $-3\overrightarrow{IF}$

Capacité 3 *Construire une somme vectorielle*



1. Soit $ABCDEFGH$ un cube.
   - **a.** Donner un représentant d'origine A du vecteur $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AD}$.
   - **b.** Construire un représentant d'origine C du vecteur $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AD}$.
   - **c.** Déterminer un représentant d'origine A du vecteur $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AE}$.
   - **d.** Justifier que $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$.
   - **e.** Déterminer l'image du point H par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE})$.
2. Soit $MNPQ$ un tétraèdre.
   - **a.** Faire une figure.
   - **b.** Recopier et compléter l'égalité : $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{MP} + \ldots + \overrightarrow{QP}$
   - **c.** En déduire que $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{QN}$.

1) a) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AG}$

b) $\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AD}$

c) $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{HG}$

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HG}$

$\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AG}$

d) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$

e) $\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EA}$

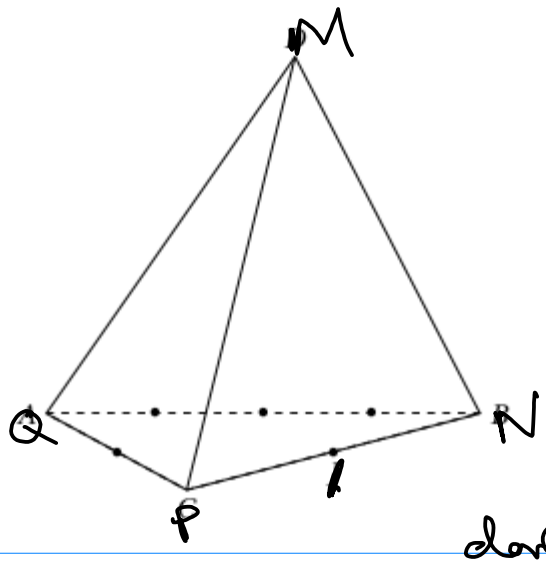
$\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{EA}$

$\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}) = \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{HB}$

L'image du point H par la translation de vec

- tout $\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE})$ est donc le point B

2) Soit MNPQ un tétraèdre



a)

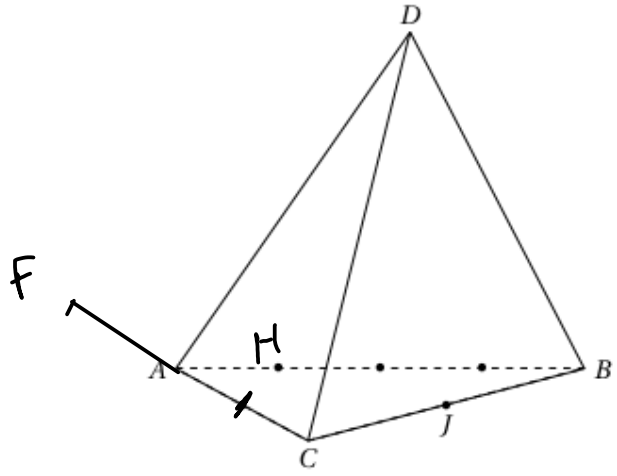
$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{QP}$

b) On en déduit que :

$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PN}$

donc $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{QN}$

Capacité 4 ***Utiliser la colinéarité pour démontrer un alignement ou un parallélisme***



Soit $ABCD$ un tétraèdre. J est le milieu de $[BC]$, H et F sont les points tels que :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

1. Compléter la figure.
2. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. En déduire que les points F, H et J sont alignés.

2) $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AH}$

donc $\overrightarrow{FH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CJ}$

$\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

en effet J milieu de [CB] donc $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

On a donc $\overrightarrow{FJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{FJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{FJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})$

$\overrightarrow{FJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

donc $\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

On rappelle que $\overrightarrow{FH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

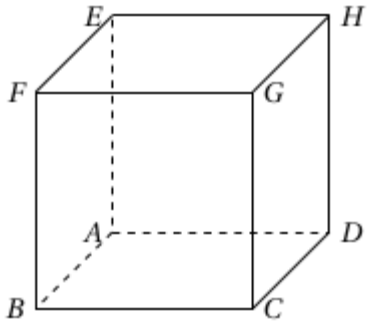
On remarque que $\overrightarrow{FJ} = 2\overrightarrow{FH}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{FJ}$ et $\overrightarrow{FH}$ sont donc colinéaires et comme ils ont un point commun, les points F, J, et H sont alignés.

Capacité 6 ***Exploiter une figure pour exprimer un vecteur comme combinaison linéaire de vecteurs, voir capacité 2 p.51***

Soit $ABCDEFGH$ le cube de la capacité 3.

1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{BH}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
2. Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ peut-il s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$?



1) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{AD} +$

2) On ne peut pas exprimer $\overrightarrow{AE}$ comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, car les points A, B, D et E n'appartiennent pas à un même plan et donc il n'existe pas de réels x et y tels que : $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AD} + y\overrightarrow{AE}$.

On dit que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont linéairement indépendants ou non coplanaires.

Capacité 6 ***Exploiter une figure pour exprimer un vecteur comme combinaison linéaire de vecteurs, voir capacité 2 p.51***

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. Soit N et un point de l'espace et I le milieu du segment $[EF]$. Démontrer que :

$$\overrightarrow{NI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{NE} + \overrightarrow{NF}\right)$$

2. Soit $ABCD$ un tétraèdre. I est le milieu de $[CD]$, J celui de $[AI]$, M et H sont définis par :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$$

a. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{BJ}$ comme combinaisons linéaires de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

b. En déduire que les droites (MH) et (BJ) sont parallèles.

1) On développe $\frac{1}{2}(\overrightarrow{NE}+\overrightarrow{NF})$

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{NE}+\overrightarrow{NF}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IF})$$

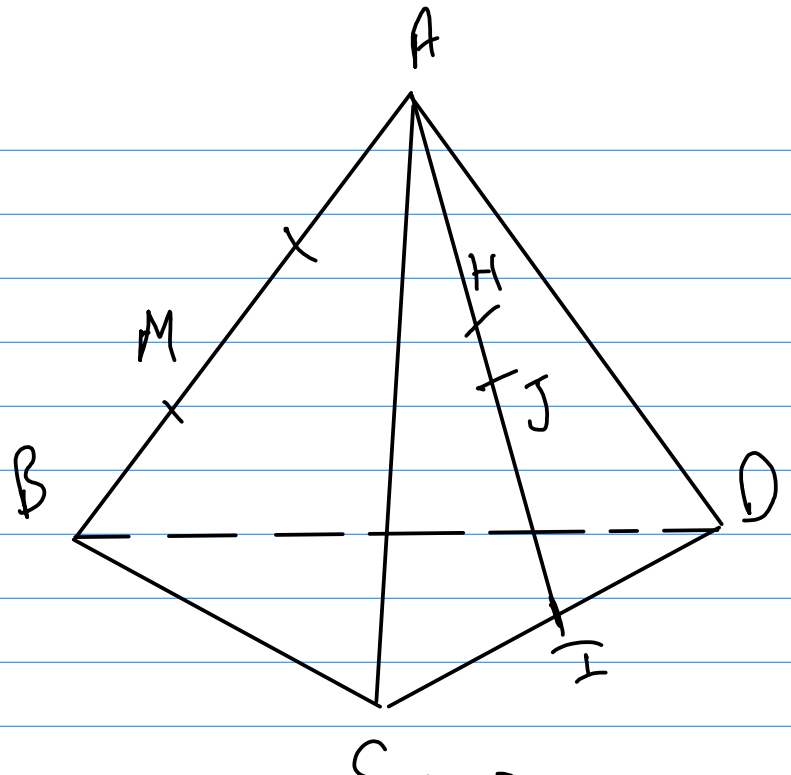
$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{NE}+\overrightarrow{NF}) = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IF})$$

On I milieu de $[EF]$ donc $\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IF}=\vec{0}$ et donc :

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{NE}+\overrightarrow{NF}) = \frac{1}{2}\times 2\overrightarrow{NI} = \overrightarrow{NI}$$

L'égalité est donc démontrée.

2)



a) Exprimons $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{BJ}$ comme combinaisons linéaires de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$:

Tout d'abord, décomposons $\overrightarrow{MH}$:

$$\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AH} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$$

Or I milieu de $[CD]$ donc d'après la propriété démontrée en 1) :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

Donc $\overrightarrow{MH} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

$$\boxed{\overrightarrow{MH} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}}$$

Ensuite, décomposons $\overrightarrow{BJ}$:

I milieu de $[AI]$ donc d'après la propriété de 1)

$$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BI}\right)$$

On recommence avec $\overrightarrow{BI}$ puisque I milieu de $[CD]$:

$$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}\right)$$

Donc on a :

$$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}\right)\right)$$

$$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$$

On fait apparaître $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ en décomposant $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$$

En substituant dans ce qui précède :

$$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) + \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right)$$

$$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

$$\boxed{\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}}$$

Si on compare avec $\overrightarrow{MH} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$

on observe que $\overrightarrow{MH} = \frac{2}{3}\left(-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)$

donc $\boxed{\overrightarrow{MH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}}$

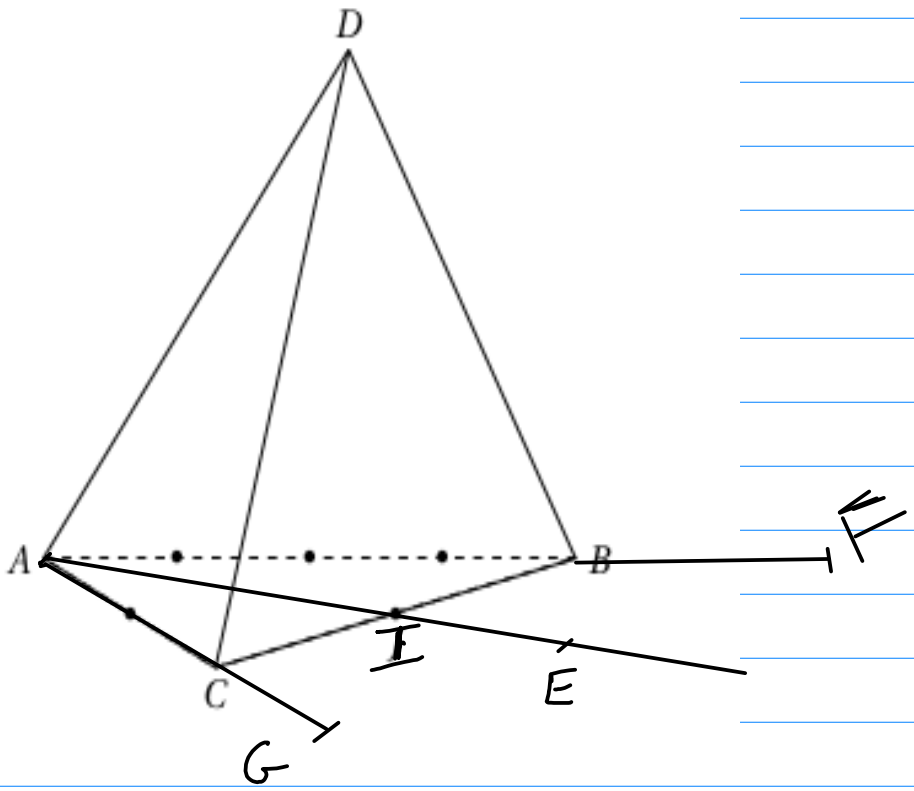
b) On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires et que les droites (MH) et (BJ) sont parallèles.

Capacité 3 ***Utiliser la colinéarité pour démontrer un alignement ou un parallélisme***

Soit $ABCD$ un tétraèdre, I le milieu de $[BC]$ et E, F et G les points définis par :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI} \quad \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{CG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$$

1. Faire une figure.
2. Démontrer que $\overrightarrow{FG} = 2\overrightarrow{FE}$. Que peut-on en déduire pour les points F, G et E ?
3. Donner trois vecteurs directeurs de la droite (FE).



2) $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{IE}$

Or I milieu de $[BC]$ donc $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

et $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$ donc $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CI}$

donc $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$

donc $\overrightarrow{FE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$

Finalement, on a

$\overrightarrow{FE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{FE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

On a démontré précédemment que

$\overrightarrow{FG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

On en déduit que $\overrightarrow{FG} = 2\overrightarrow{FE}$

Les vecteurs $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{FE}$ sont colinéaires et ont une extrémité commune donc F, G, E sont alignés.

3) F, G, E alignés et distincts
donc $(FG) = (FE) = (EG)$

On en déduit que $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont trois vecteurs directeurs de (FE)

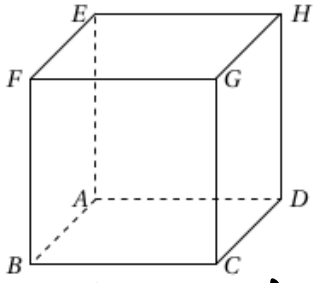
Logique 1

Soit $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ deux droites de l'espace. Les implications suivantes sont-elles vraies ?

1. (I_1) « Si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles, alors une droite $\mathscr{D}_3$ dont un vecteur directeur est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est parallèle à $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$. »
2. (I_2) « Si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ont des vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui ne sont pas colinéaires alors elles sont sécantes. »
3. (I_3) « Si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ont des vecteurs directeurs colinéaires alors elles n'ont pas de point commun. »

1) L'implication (I_1) est vraie.
Soit $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ un vecteur directeur de D_3.
Puisque D_1 et D_2 sont parallèles, on a $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires donc $\vec{u} = k\vec{v}$ avec k réel.
On en déduit que $\vec{w} = kx\vec{v} + y\vec{v}$
et donc $\vec{w} = (kx + y)\vec{v}$
$\vec{w}$ est donc colinéaire à $\vec{v}$ et donc à $\vec{u}$
ainsi D_3 est parallèle à D_1 et à D_2

2) (I_2) est fausse.
Prenons par exemple le cube ABCDEFGH,
les droites (AB) et (EH) ont des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{EH}$ qui ne sont pas colinéaires.



Les droites (AB) et (EH) ne sont pas parallèles. Elles ne sont pas non plus sécantes car sinon les points A, B, E et H appartiendraient au même plan ; ce qui n'est pas vrai.

3) (I3) est fausse
Si D_1 et D_2 sont confondues alors elles ont des vecteurs directeurs colinéaires et une infinité de points communs.

Capacité 8

1. Déterminer le nombre maximal de plans (respectivement de droites) distincts qu'on peut définir à partir de quatre points de l'espace.
2. Déterminer le nombre de plans qu'on peut définir en utilisant uniquement les sommets d'un cube $ABCDEFGH$.

1) A partir de 4 points de l'espace on peut déterminer :

- pour les droites (définies par 2 points)
  4 choix pour le premier point
  3 choix pour le second point
  donc $4 \times 3 = 12$ couples (Point 1, Point 2)
  et donc $\frac{12}{2} = 6$ droites puisque les couples (Point 1, Point 2) et (Point 2, Point 1) définissent la même droite.

- pour les plans (définies par 3 points)
  4 choix pour le premier point
  3 choix pour le second point
  2 choix pour le troisième point
  donc $4 \times 3 \times 2 = 24$ triplets (Point 1, Point 2, Point 3)
  ce qui donne $\frac{24}{6} = 4$ plans car on peut constituer $3 \times 2 \times 1 = 6$ triplets à partir de 3 points.

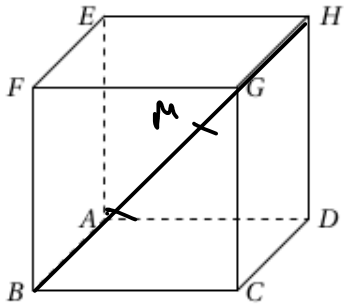
2) Pour un cube on peut définir à partir des sommets uniquement :
10 plans : - les 6 plans des faces
- les 4 plans diagonaux (EBC), (AGD), (EFC), (AHG) dans un cube ABCDEFGH.
en total.

Capacité 10 ***Démontrer que des vecteurs sont coplanaires***

Soit $ABCDEFGH$ un cube et I le milieu de $[FC]$. M est le point tel que $\overrightarrow{HM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HB}$.

1. Compléter la figure.
2. Citer trois vecteurs coplanaires avec les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EG}$.
3. Citer trois vecteurs non coplanaires avec les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EG}$.
4. Démontrer que $\overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AE}\right)$.

   En déduire que $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{FM}$ sont coplanaires.
5. En décomposant $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AI}$ selon $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$, démontrer de même que les points A, M et I sont alignés.



1)

2) Vecteurs coplanaires avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$:
$\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{FH}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EH}$.

3) Vecteurs non coplanaires avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$:
$\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{EC}$.

4) $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{FE} - \overrightarrow{AE}$
AEFB est un carré donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$
On a donc $\overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC}$

AEFB et ABCD sont des carrés donc :

$\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

On a donc : $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$

Enfin, $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HM}$

$\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{FH} + \frac{2}{3}\overrightarrow{HB}$

On $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$

et $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$

On a donc : $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB})$

$\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{FM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$$\boxed{\overrightarrow{FM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AE})}$$

On $\overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$

donc $\boxed{\overrightarrow{FM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{FA})}$

① On en déduit que $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{FM}$ sont coplanaires.

5) I milieu de [FC]

donc $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$

donc $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD})$ car $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AE}\right)$$

donc $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB}\right)$$

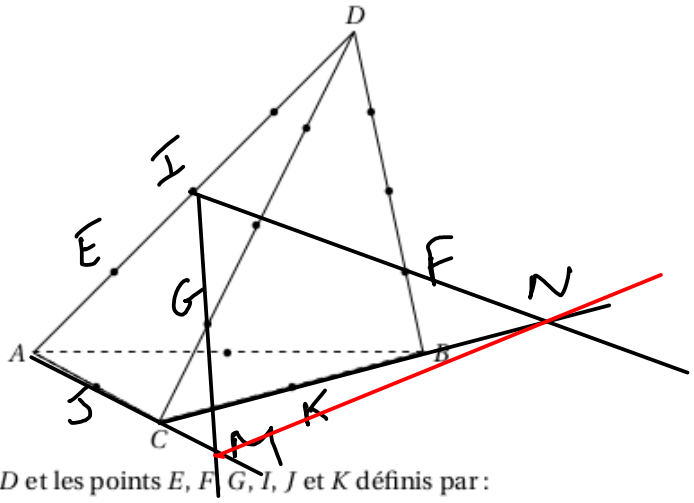
Comparons avec $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD})$

On en déduit que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\cdot\overrightarrow{AM}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires et ont un point en commun.
donc A, I, M sont alignés.

Capacité 10 ***Décrire la position relative de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans.***



On considère un tétraèdre $ABCD$ et les points E, F, G, I, J et K définis par :

$$\overrightarrow{DE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DA} \quad \overrightarrow{DF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DB} \quad \overrightarrow{DG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC} \quad \overrightarrow{DI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} \quad \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JC} = \vec{0} \quad \overrightarrow{KB} = -\overrightarrow{KC}$$

1. Compléter la figure.
2. Les droites (IG) et (JK) sont-elles sécantes ?
3. Démontrer que les droites (EF) et (AB) sont parallèles.
4. Démontrer que les plans (EFG) et (ABC) sont parallèles.
5. Démontrer que la droite (IG) est sécante avec le plan (ABC).
6. En déduire que les plans (IGF) et (ABC) sont sécants et construire leur intersection sur la figure.

2) Hypothèse : Supposons que (IG) et (JK) sont sécantes

Conclusion : On en déduit que K appartient au plan (IGJ). Cette conclusion est en contradiction avec le contexte de l'exercice : K milieu de [BC] ne peut appartenir au plan (IGJ)

Par un raisonnement par l'absurde, on en déduit que (IG) et (JK) ne sont pas sécantes (l'hypothèse est fausse car elle aboutit à une contradiction).

4) On applique deux fois le théorème de

Thalès :

• Dans ADC, on a $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$

donc $\overrightarrow{EG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

• Dans DBC, on a $\overrightarrow{DF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$

donc $\overrightarrow{GF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$

$(\overrightarrow{EG}, \overrightarrow{EF})$ est une base du plan (EGF)
$\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont respectivement colinéaires à $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$ qui forment une base du plan (ACB)

On en déduit que les plans (EGF) et (ACB) sont parallèles.

3) Dans le triangle ABD, on a :

• $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DB}$

D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\overrightarrow{EF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$

et donc $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires.

et donc (EF) parallèle à (AB)

5) Dans le triangle ACD, on a :

$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$,

D'après la contraposée du théorème de Thalès on en déduit, puisque $\frac{3}{4} \neq \frac{1}{2}$, que (IG) et (AC) sont sécantes.
Or (AC) est une droite incluse dans le plan (ABC).
On en déduit que (IG) est sécante avec le plan (ABC).

6) (IG) droite de (IGF) est sécante avec (AC) droite de (ABC)
On en déduit que (IGF) et (ABC) ont au moins un point commun
De plus I milieu de [AD] n'appartient pas au plan (ABC) car le tétraèdre n'est pas applati.

Donc (IGF) et (ABC) sécantes selon une droite qui passe par l'intersection M de (IG) et (AC) et l'intersection N de (IF) et (BC)