

Correction du DS n°1 Sujet A

Exercice 1 sur 4 points

Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = (4x - 8)\sqrt{x}$.

On note \mathcal{C}_h la courbe représentative de h dans un repère du plan.

1. Justifier que h est dérivable sur $]0; +\infty[$. On note h' sa fonction dérivée.

2. Soit x un réel strictement positif, démontrer que $h'(x) = \frac{(6x - 4)\sqrt{x}}{x}$.

3. Déterminer une équation de la tangente à \mathcal{C}_h au point d'abscisse 4.

1) h est dérivable comme produit de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$

2) Pour tout réel $x > 0$ on a

$$h(x) = u(x) \times v(x)$$

$$\text{avec } u(x) = 4x - 8 \text{ et } v(x) = \sqrt{x}$$

u et v sont dérivables sur $]0; +\infty[$

$$u'(x) = 4 \text{ et } v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{On a : } (u \times v)' = u'v + uv'$$

$$\text{donc } h'(x) = 4 \times \sqrt{x} + (4x - 8) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$h'(x) = \frac{4\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} + 4x - 8}{2\sqrt{x}}$$

$$h'(x) = \frac{8x + 4x - 8}{2\sqrt{x}} = \frac{12x - 8}{2\sqrt{x}}$$

$$h'(x) = \frac{6x - 4}{\sqrt{x}}$$

3) Une équation de la tangente à \mathcal{C}_h au point d'abscisse h est:

$$y = h'(h) \times (x - h) + h(h)$$

$$y = \frac{6 \times h - 4}{\sqrt{h}} \times (x - h) + (4 \times h - 8) \sqrt{h}$$

$$y = 10(x - h) + 16$$

$$y = 10x - 2h$$

Exercice 2 sur 3 points

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2e^x - 4x$.

f est dérivable sur \mathbb{R} comme somme de fonctions dérivables et on note f' sa fonction dérivée.

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère du plan.

1. Soit x un réel, déterminer une expression de $f'(x)$.
2. Déterminer l'abscisse x d'un point de la courbe \mathcal{C}_f où sa tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -2x$.

1) Pour tout réel x , on a:

$$f(x) = 2e^x - 4x$$

donc

$$f'(x) = 2e^x - 4$$

2) La tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse x est parallèle à la droite d'équation $y = -2x$ soit $f'(x) = -2$.

On résout l'équation dans \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} f'(x) = -2 &\Leftrightarrow 2e^x - 4 = -2 \\ &\Leftrightarrow e^x = \frac{4-2}{2} = 1 \\ &\Leftrightarrow e^x = e^0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

La tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite d'équation $y = -2x$

Exercice 3 sur 3 points

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = \frac{e^x}{e^x + 2}$$

g est dérivable sur \mathbb{R} comme quotient de fonctions dérivables et on note g' sa fonction dérivée. On note \mathcal{C}_g la courbe représentative de g dans un repère du plan.

1. Soit x un réel, déterminer une expression de $g'(x)$. Détailler les calculs.
2. Existe-t-il une tangente à \mathcal{C}_g de coefficient directeur égal à 2? Justifier.

Dans cette question toute trace de recherche pertinente sera valorisée.

1) Pour tout réel x on a:

$$g(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{avec} \quad u(x) = e^x \quad \text{et} \quad v(x) = e^x + 2$$

u et v dérivables sur \mathbb{R}

$$u'(x) = e^x \quad \text{et} \quad v'(x) = e^x$$

On a $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

donc $g'(x) = \frac{e^x(e^x+2) - e^x \times e^x}{(e^x+2)^2}$

$$g'(x) = \frac{2e^x}{(e^x+2)^2}$$

2) Il existe une tangente à Γ_g de coefficient directeur 2ssi l'équation $g'(x) = 2$ admet des solutions dans \mathbb{R} .

$$g'(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{2e^x}{(e^x+2)^2} = 2 \Leftrightarrow e^x = (e^x+2)^2$$

$$g'(x) = 2 \Leftrightarrow e^x = (e^x)^2 + 2e^x + 4$$

$$g'(x) = 2 \Leftrightarrow 0 = (e^x)^2 + e^x + 4$$

Or $(e^x)^2 > 0$ et $e^x > 0$

donc $(e^x)^2 + e^x + 4 > 0$

L'équation $g'(x) = 2$ n'a donc pas de solution et Γ_g n'a pas de tangente de coefficient directeur 2.