Histoire 1

Instituteur, professeur de lycée puis universitaire, Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815-1897) était un brillant mathématicien mais aussi un grand pédagogue. Il a défini pour la première fois avec rigueur, la construction des nombres irrationnels, comme $\sqrt{2}$ connu depuis Pythagore, et la notion de limite dans le cadre de la convergence d'une suite ou de la continuité d'une fonction.

1 Limite finie ou infinie d'une suite

1.1 Suite de limite finie, suite convergente

Définition 1

- **Une suite (u_n) converge vers un réel ℓ si les termes u_n deviennent aussi proches que l'on veut de ℓ dès que n est assez grand.**

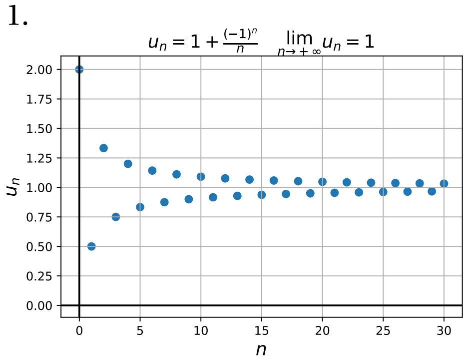
  On note $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell}$ et on dit que (u_n) est **convergente** et a pour limite ℓ.

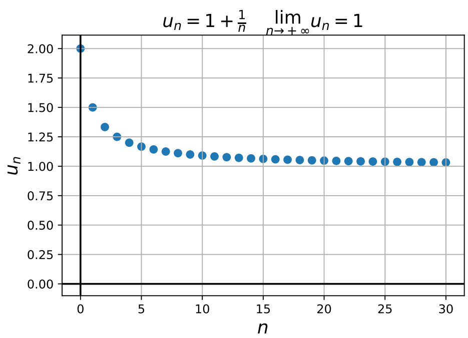
- **Plus formellement, une suite (u_n) converge vers un réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.**

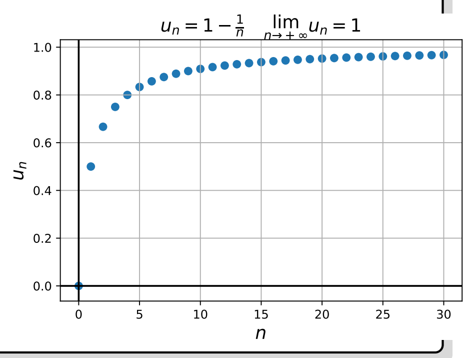
- Avec des quantificateurs, on formule ainsi :

  une suite (u_n) converge vers un réel ℓ si pour tout réel $a > 0$, il existe un entier n_a, tel que pour tout entier $n \geqslant n_a$, $u_n \in \,]\ell - a ; \ell + a[\Leftrightarrow \left| u_n - \ell \right| < a$.

On donne ci-dessous trois représentations graphiques de suites de limite finie, qui convergent toutes vers 1.







Propriété 1 ***unicité de la limite, admise***

- Si une suite (u_n) est convergente, alors elle possède une unique limite.
- Si (u_n) converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Capacité 1 *Utiliser la définition d'une suite convergente*

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$.

- **a.** La suite (u_n) est-elle monotone ? Justifier.
- **b.** Quelle limite peut-on conjecturer pour la suite (u_n) ?
- **c.** Déterminer à partir de quel rang, on a $u_n \in \left]1 - 10^{-3} ; 1 + 10^{-3}\right[$.
- **d.** À partir de la définition, démontrer que (u_n) converge.

2. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $v_n = 1 - \dfrac{(-1)^n}{n}$.

- **a.** La suite (v_n) est-elle monotone ? Justifier.
- **b.** Conjecturer la limite de (v_n) puis démontrer qu'elle converge à partir de la définition.

3. Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = (-1)^n$.

La suite (w_n) est-elle convergente ? Justifier.

1.2 Suite de limite infinie, suite divergente

Définition 2

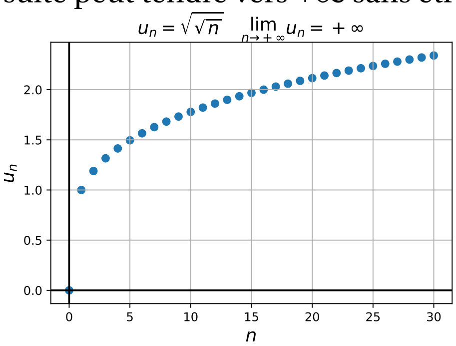
- **Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ si tout intervalle du type $]A ; +\infty[$ (avec A nombre réel) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.**

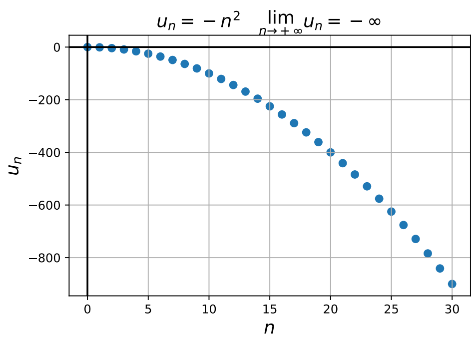
  On note $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$.

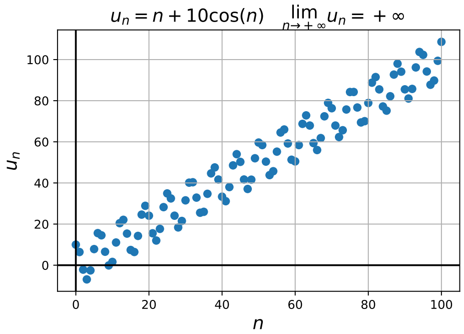
- **Une suite (u_n) a pour limite $-\infty$ si tout intervalle du type $]-\infty ; A[$ (avec A nombre réel) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.**

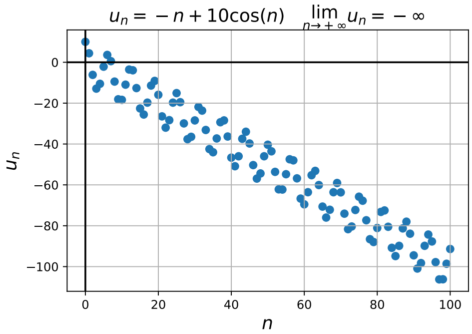
  On note $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty}$.

On donne ci-dessous trois représentations graphiques de suites de limite infinie.
On peut remarquer que l'évolution d'une suite de limite infinie peut être plus ou moins rapide et qu'une suite peut tendre vers $+\infty$ sans être croissante ou vers $-\infty$ sans être décroissante.









Capacité 2 *Utiliser les différentes définitions de limite d'une suite*

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \sqrt{n}$.

Démontrer à partir de la définition que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

2. Expliquer pourquoi les boucles Tant Que des algorithmes suivants se terminent puis les traduire en `Python`.

Algorithme 1

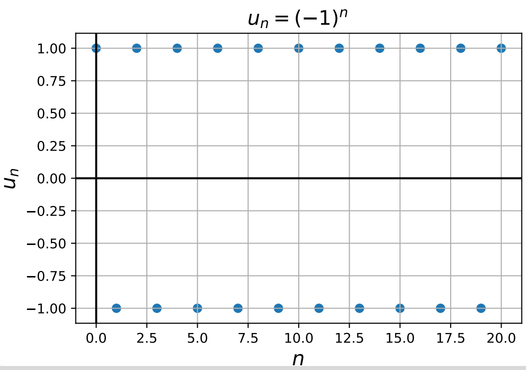
N $\longleftarrow$ 1
Tant que $\dfrac{1}{\mathrm{N}} > 10^{-6}$ faire :
  N $\longleftarrow$ N + 1
Fin Tant que

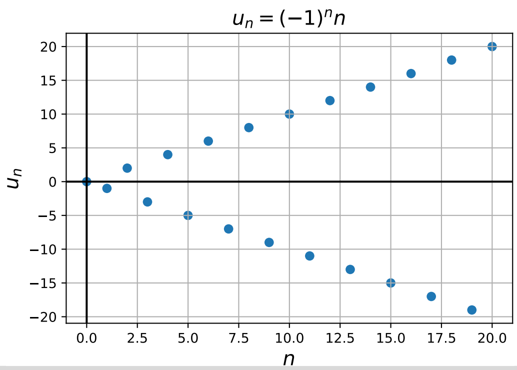
Algorithme 2

N $\longleftarrow$ 1
Tant que $\mathrm{N}^2 \leqslant 10^6$ faire :
  N $\longleftarrow$ N + 1
Fin Tant que

Remarque 1

- Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'a pas nécessairement de limite finie ou infinie.
- Une suite non déterministe à valeurs dans un ensemble fini n'a pas de limite, par exemple la suite des décimales de π ou la suite des résultats lors de la répétition d'une expérience aléatoire de façon indépendante (lancers de dés, de pièces).
- On donne ci-dessous deux exemples de suites sans limite, l'une est bornée (il existe m et M tels que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant u_n \leqslant M$) et l'autre non.





Définition 3

Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente** : soit elle a une limite infinie, soit elle n'a pas de limite.

1.3 Limites de suites usuelles

Propriété 2 ***admise***

1. Les suites de terme général $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^p}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ (avec $p \in \mathbb{N}^*$), e^{-n} sont convergentes de limite 0.
2. Les suites de terme général n, n^p (avec $p \in \mathbb{N}^*$), $\sqrt{n}$, e^n sont divergentes de limite $+\infty$.
3. Toute suite constante converge vers la valeur de la constante.

1.4 Algorithme de seuil

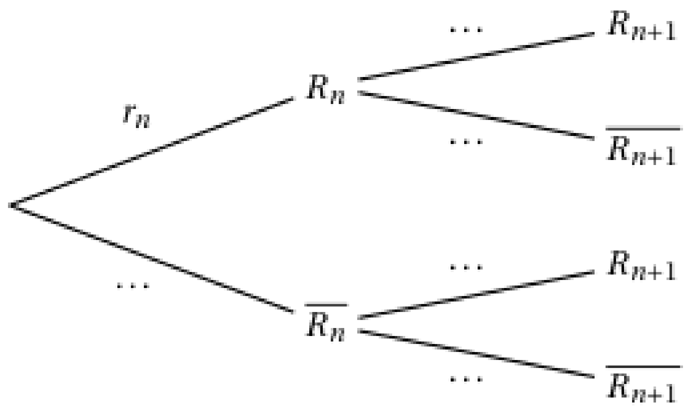
Capacité 3 ***Modélisation par une suite et algorithme de seuil***

Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles en verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide.
On suppose que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant.
Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

- à la fin de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est $0,6$;
- si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est $0,95$;
- si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est $0,2$.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'évènement « le client rapporte la bouteille de son panier de la n-ième semaine ».
Pour tout entier naturel n non nul, on note r_n la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la n-ième semaine. On a alors $r_n = \mathbb{P}(R_n)$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré (aucune justification n'est attendue) :



2. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $r_{n+1} = 0,75r_n + 0,2$.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $r_n < 0,8$.

4. Calculer les vingt premiers termes de la suite (r_n) avec la calculatrice. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (r_n) ?

5. On admet que la suite (r_n) converge. Déterminer la la valeur de ℓ en passant à la limite dans la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $r_{n+1} = 0,75r_n + 0,2$.

6. Justifier qu'il existe un entier n tel que $u_n > 0,79$ et compléter la fonction Python ci-dessous pour que `seuil()` renvoie le plus petit entier n tel que $r_n > 0,79$. Il s'agit d'un **algorithme de seuil**.

```python
def seuil():
    r = 0.9
    n = 1
    while r .... :
        r = ........
        n = n + 1
    return n
```

7. Modifier la fonction `seuil()` en une fonction `seuil2(s)` qui retourne le plus grand entier n tel que $r_n < s$. Pour quelles valeurs de `s`, l'exécution de `seuil2(s)` ne se terminera-t-elle pas ?

2 Règles opératoires sur les limites

Dans toute cette section les suites (u_n) et (v_n) possèdent une limite finie ou infinie, lorsque n tend vers $+\infty$. L'abréviation FI signifie forme indéterminée, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de théorème général permettant de conclure.

2.1 Limite d'une somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} u =$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v =$	ℓ'	ℓ'	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

2.2 Limite d'un produit

$\lim\limits_{n\to+\infty} u =$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v =$	ℓ'	$\ell' > 0$ ou $\ell' < 0$	$\ell' > 0$ ou $\ell' < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n =$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$ ou $-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

2.3 Limite d'un quotient

$\lim\limits_{n\to+\infty} u =$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$\ell > 0$ ou $\ell < 0$	$\ell > 0$ ou $\ell < 0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v =$	$\ell' \neq 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	$\ell' > 0$ ou $\ell' < 0$	$\ell' > 0$ ou $\ell' < 0$	0^+	0^-
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u =$	$-\infty$	$+\infty$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v =$	0^+ ou 0^-	0^+ ou 0^-	$-\infty$ ou $+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$-\infty$ ou $+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	0^- ou 0^+	0^- ou 0^+	FI	FI

2.4 Application des règles opératoires et formes indéterminées

Il existe quatre formes indéterminées : « $\infty - \infty$ », « $\infty \times 0$ », « $\dfrac{\infty}{\infty}$ », $\dfrac{0}{0}$ ». En pratique, pour lever l'indétermination, on change de forme en factorisant par exemple par les termes prépondérants (en l'infini pour tous entiers positifs $p > q$, n^p l'emporte sur n^q, et n^p l'emporte sur $\sqrt{n}$).

Capacité 4 ***Application des règles opératoires, formes indéterminées***

Calculer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = -3n^2 - 5n + 1$
2. $u_n = -2n\sqrt{n}$
3. $u_n = 3 + \dfrac{e^n}{e^{2n} + 2}$
4. $u_n = -3n^2 + 5n + 1$
5. $u_n = 3n^4 - 5n^3 - n + 1$
6. $u_n = \dfrac{4n+1}{n+1}$
7. $u_n = \dfrac{n^2}{e^{-n} + \frac{1}{n}}$
8. $u_n = n - \sqrt{n}$
9. $u_n = \dfrac{4+n}{n - n^2 - 1}$

3 Limites par comparaison

3.1 Passage à la limite dans une inégalité

Propriété 3

1. Soit une suite (u_n) telle que :
   - (u_n) converge vers un réel ℓ ;
   - pour tout entier naturel n, on a $u_n < M$;

   alors on a l'inégalité large $\ell \leqslant M$.

   On n'a pas nécessairement l'inégalité stricte $\ell < M$.

   Lorsqu'on passe à la limite dans une inégalité, le sens de celle-ci est conservé mais elle devient une inégalité large.

2. Si une suite (u_n) est croissante et converge vers ℓ, alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à ℓ.

Capacité 5 ***Passer à limite dans une inégalité***

On définit les suites (u_n) et (v_n) pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k}$ et $v_n = 1 + e^{-n}$.

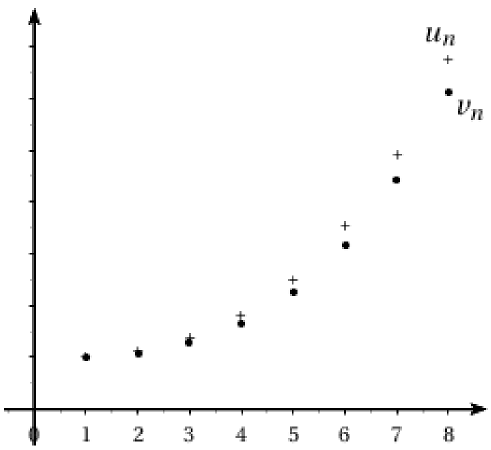
1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, exprimer u_n sous une forme plus simple.
2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, comparer u_n et v_n.
3. On admet que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,1^n = 0$. Qu'obtient-on lorsqu'on passe à limite dans l'inégalité établie à la question précédente ?

3.2 Limite par comparaison

Théorème 1 ***limite par comparaison***

Soit deux suites (u_n) et (v_n).

1. ☞ S'il existe un entier n_0 tel que :
   $\forall n \geqslant n_0,\ v_n \leqslant u_n$
   ☞ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$
   alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
2. ☞ S'il existe un entier n_0 tel que :
   $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n$
   ☞ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$
   alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.



Démonstration ***Au programme, voir page 132 du manuel***

Démontrons la divergence vers $+\infty$ d'une suite (u_n) minorée par une suite (v_n) divergeant vers $+\infty$

Soit A un réel et $\mathrm{I} =]A; +\infty[$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ donc il existe un entier n_1 tel que pour tout entier $n \geqslant n_1$ on a $v_n \in \mathrm{I}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

Capacité 6 ***Justifier qu'une suite diverge avec un théorème de limite par comparaison***

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - (1 + x)$.
   - **a.** Déterminer le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   - **b.** En déduire que pour tout réel x, on a $1 + x \leqslant \mathrm{e}^x$.
   - **c.** En déduire que la suite $\left(\mathrm{e}^n\right)_{n \geqslant 0}$ a pour limite $+\infty$.
   - **d.** En déduire que la suite $\left(\mathrm{e}^{-n}\right)_{n \geqslant 0}$ a pour limite 0^+.
2. Soit la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3n + n \cos n$.

Démontrer que (u_n) est divergente de limite $+\infty$.

3. Soit la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \sin n - 3n^2$.
Étudier la limite de la suite (v_n).

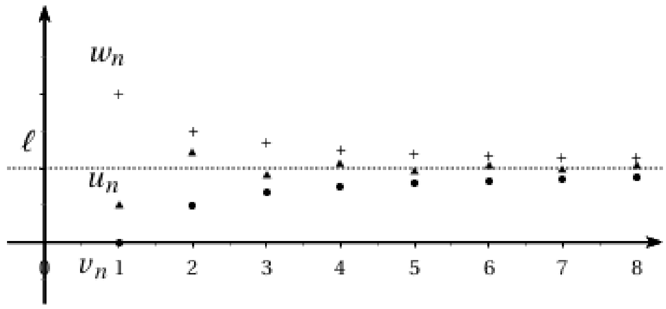
4. Soit la suite (w_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \dfrac{n^2+(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}$.
Étudier la limite de la suite (w_n).

3.3 Limite par encadrement

Théorème 2 ***théorème de limite par encadrement, dit « théorème des gendarmes »***
Soient trois suites (u_n), (v_n) et (w_n).
Si on a :

- il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$
  $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.



Démonstration *Voir version professeur ou manuel page 138*

Capacité 7 ***Déterminer une limite avec le théorème de limite par encadrement***
En utilisant le théorème de limite par encadrement, étudier la convergence des suites (u_n), et (v_n) définies pour tout entier $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = \mathrm{e}^{-2n}\cos(n) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n+n^2}{2n^2}$$

3.4 Limites de suites géométriques

Propriété 4 ***inégalité de Bernoulli***

$$\forall a \in]-1\,;+\infty[, \forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geqslant 1+na$$

Démonstration

Soit $a \in]-1\,;+\infty[$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la proposition $\mathscr{P}_n : \left((1+a)^n \geqslant 1+na\right)$

Démontrons par récurrence que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$\boxed{\text{Initialisation}}$ Pour $n=0$ on a $(1+a)^0 = 1$ et $1+0\times a = 1$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

$\boxed{\text{Hérédité}}$ On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie, c'est-à-dire $(1+a)^n \geqslant 1+na$.
$a > -1$ donc $1+a > 0$ donc :

....

....

....

....

....

....

....

....

Donc, $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie, donc la propriété est héréditaire.

$\boxed{\text{Conclusion}}$ Par application du principe de récurrence on en conclut que $\forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geqslant 1+na$.
On l'a démontré pour tout $a \in]-1\,;+\infty[$, donc :

$$\forall a \in]-1\,;+\infty[\,, \forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geqslant 1+na$$

Théorème 3

Soit une suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 et de raison q.

1. Si $q=0$ ou $q=1$ ou $u_0=0$ alors (u_n) est constante.
2. Si $q>1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
   Si de plus $u_0>0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   Si de plus $u_0<0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
3. Si $q \leqslant -1$ alors soit $u_0=0$ et (u_n) constante sinon (u_n) n'a pas de limite.
4. Si $|q|<1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ et (u_n) converge vers 0.

Démonstration *Au programme, voir manuel page 132*

1. Si $q=0$ alors pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $q^n=0^n=0$ et $u_n=u_0\times q^n=0$.
   Si $q=1$ alors pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $q^n=1^n=1$ et $u_n=u_0\times 1^n=u_0$.

2. $\boxed{\text{ROC}}$ Si $q>1$ alors il existe $a>0$ tel que $q=1+a$.
   D'après l'inégalité de Bernoulli, pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $q^n=(1+a)^n\geqslant 1+na$.
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

3. Si $q\leqslant -1$, comme pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $u_n=u_0\times q^n$, soit on a $u_0=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=0$, soit on a $u_0\neq 0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=u_0\times(-1)^n\times\left|q\right|^n$. Dans ce cas, soit $q=-1$ et $u_n=-u_0$ si n impair ou $u_n=u_0$ si n pair donc (u_n) n'a pas de limite ; soit $\left|q\right|>1$ donc d'après ce qui précède $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|q\right|^n=+\infty$ donc la suite des termes d'indices impairs tend vers $+\infty$ et la suite termes d'indices impairs tend vers $-\infty$ ou vice-versa, par conséquent (u_n) n'a pas de limite non plus.

4. $|q|<1$ équivaut à $q\in\,]-1\,;1[$.

   - On a déjà vu que si $q=0$ alors pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $q^n=0^n=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0$.
   - $\boxed{1^{\text{er}}\text{ cas} : q\in\,]0\,;1[}$

     On a $0<q<1$ donc $\dfrac{1}{q}>1$ donc il existe $a>0$ tel que $\dfrac{1}{q}=1+a$.

     D'après l'inégalité de Bernoulli, pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $\dfrac{1}{q^n}=\left(\dfrac{1}{q}\right)^n=(1+a)^n\geqslant 1+na$.

     Or $a>0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}1+na=+\infty$ donc d'après le théorème de limite par comparaison on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{q^n}=+\infty$.

     Donc par quotient on a $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0^+$

     Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $q^n=u_0\times q^n$ donc par produit on a $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.
   - $\boxed{2^{\text{ème}}\text{ cas} : q\in\,]-1\,;0[}$

     On a $\left|q\right|\in\,]0\,;1[$ donc d'après ce qui précède on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|q^n\right|=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|q\right|^n=0^+$.

     Or si une suite converge en valeur absolue vers 0, alors elle converge vers 0 (preuve à faire en exercice).

     On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0$.

     De même que dans le cas précédent, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

Capacité 8 ***Déterminer la limite d'une suite géométrique***

Dans chaque cas, étudier la convergence de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

1. $u_n = \dfrac{2^{4n}}{5^{2n}}$
2. $u_n = \dfrac{6^n + 3^n}{5^n}$
3. $u_n = \dfrac{90}{n - 0,5^n}$
4. $u_n = -7 \times (-0,7)^n$
5. $u_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sin 2n$
6. $u_n = \dfrac{2^n + 1}{3^{n+1} - 1}$
7. $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$
8. $u_n = 3\left(\dfrac{4}{3}\right)^n - 2 \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$

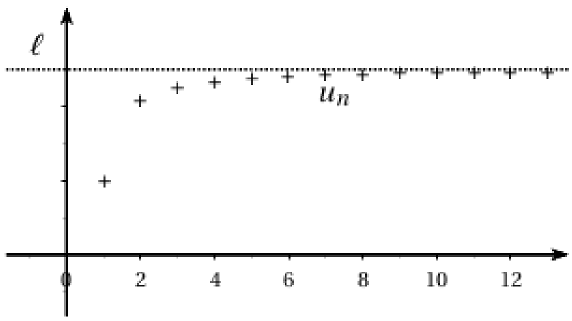
4 Limites de suites monotones

4.1 Convergence des suites monotones bornées

Théorème 4 ***admis***

Soit (u_n) une suite réelle.

1. Si (u_n) est croissante à partir d'un certain rang et majorée alors elle converge.
2. Si (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang et minorée alors elle converge.



Capacité 9 ***Justifier l'existence d'une limite par convergence monotone***

Déterminer dans chaque cas si la propriété $\mathscr{P}_i$ citée suffit pour affirmer que la suite u converge.

1. $\mathscr{P}_1$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} < 2$
2. $\mathscr{P}_2$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $2 < u_n \leqslant u_{n+1}$
3. $\mathscr{P}_3$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $2 < u_{n+1} \leqslant u_n$
4. $\mathscr{P}_4$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n < 2$

4.2 Divergence des suites monotones non bornées

Théorème 5

Soit (u_n) une suite réelle.

1. Si (u_n) est croissante et non majorée alors elle diverge vers $+\infty$.
2. Si (u_n) est décroissante et non minorée alors elle diverge vers $-\infty$.

Démonstration ***Au programme, voir manuel page 134***

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Capacité 10 ***Logique***

1. *Raisonnement par l'absurde*

   On considère la suite (u_n) définie par :

   $$u_0 = 734 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = u_n - n^2$$

   a. Calculer u_1 et u_2.

   b. Démontrer que la suite (u_n) est monotone.

   c. On suppose que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ.

   - Quelle serait alors la limite de $u_{n+1} - u_n$?
   - En déduire une contradiction.
   - Conclure sur la limite possible de la suite (u_n).

2. *Métropole 2024 J1*

   On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n), telles que, pour tout entier naturel n : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

   De plus, la suite (u_n) converge vers -1 et la suite (w_n) converge vers 1.

   Peut-on affirmer que la suite (v_n) converge vers un nombre réel ℓ appartenant à l'intervalle $[-1;1]$?

Table des matières