Corrigé de la fiche d'exercices – Logarithme népérien (MathsComp)

Exercice 1

Résoudre dans $]0;+\infty[$ les équations ou inéquations suivantes :

1. $\ln(x) = 5$.

$$\ln(x) = 5 \iff x = e^5.$$

$$\boxed{x = e^5}$$

2. $2 + \ln(x) < 3$.

$$2 + \ln(x) < 3 \iff \ln(x) < 1.$$

Comme ln est croissante sur $]0, +\infty[$,

$$\ln(x) < 1 \iff x < e.$$

En tenant compte du domaine $x > 0$:

$$\boxed{x \in]0, e[}$$

3. $\ln(8x) - \ln(4) = 1 + \ln(2)$.

On regroupe les logarithmes :

$$\ln(8x) - \ln(4) = \ln\left(\frac{8x}{4}\right) = \ln(2x).$$

De plus,

$$1 + \ln(2) = \ln(e) + \ln(2) = \ln(2e).$$

Donc

$$\ln(2x) = \ln(2e) \iff 2x = 2e \iff x = e,$$

avec $x > 0$ bien vérifié.

$$\boxed{x = e}$$

Exercice 2

Déterminer le plus petit entier naturel n solution de :

1. $1{,}5^n > 10^{50}$.

On applique ln (fonction strictement croissante sur $]0, +\infty[$) :

$$1{,}5^n > 10^{50} \iff \ln(1{,}5^n) > \ln(10^{50}) \iff n\ln(1{,}5) > 50\ln(10).$$

Comme $\ln(1{,}5) > 0$, on peut diviser sans changer le sens :

$$n > \frac{50\ln(10)}{\ln(1{,}5)} \approx 283{,}9436.$$

Le plus petit entier naturel strictement supérieur est

$$\boxed{n_{\min} = 284}.$$

2. $0{,}8^n < 10^{-30}$.

   On applique ln :

$$0{,}8^n < 10^{-30} \iff \ln(0{,}8^n) < \ln(10^{-30}) \iff n\ln(0{,}8) < -30\ln(10).$$

   Or $\ln(0{,}8) < 0$, donc en divisant par $\ln(0{,}8)$, on *inverse* le sens :

$$n > \frac{-30\ln(10)}{\ln(0{,}8)} \approx 309{,}5655.$$

   Le plus petit entier naturel strictement supérieur est

$$\boxed{n_{\min} = 310}.$$

Exercice 3

On considère f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = x - 3\ln\big(e^x + 1\big).$$

1. **Démontrer que pour tout réel x, on a : $f'(x) = \dfrac{1-2e^x}{e^x+1}$.**

   $\ln\big(e^x+1\big)$ est de la forme $\ln(u(x))$ avec $u(x) = e^x + 1$.
   u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = e^x$
   D'après la formule de dérivation d'une fonction composée, $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$, donc pour tout réel x la dérivée de $\ln\big(e^x+1\big)$ est :

$$\frac{e^x}{e^x+1}$$

   En dérivant terme à terme f on obtient :

$$f'(x) = 1 - 3 \times \frac{e^x}{e^x+1}.$$

   On met au même dénominateur :

$$f'(x) = \frac{e^x+1}{e^x+1} - \frac{3e^x}{e^x+1} = \frac{1-2e^x}{e^x+1}.$$

   Donc

$$\boxed{f'(x) = \frac{1-2e^x}{e^x+1}}.$$

2. (a) **Étudier le signe de $f'(x)$.**
   Comme $e^x + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - 2e^x$.

$$1 - 2e^x = 0 \iff e^x = \frac{1}{2} \iff x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2.$$

   Ainsi,

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \Leftarrow 1-2e^x > 0 \Leftarrow e^x < \dfrac{1}{2} \Leftarrow x < -\ln 2, \\ f'(x) < 0 \Leftarrow 1-2e^x < 0 \Leftarrow e^x > \dfrac{1}{2} \Leftarrow x > -\ln 2. \end{cases}$$

(b) **En déduire le tableau de variations de f.**

D'après la question précédente, f' s'annule en $x_0 = -\ln 2$, et comme f' passe de $+$ à $-$, f admet un maximum en x_0. Calculons $f(x_0)$:

$$f(-\ln 2) = -\ln 2 - 3\ln\left(e^{-\ln 2} + 1\right) = -\ln 2 - 3\ln\left(\frac{1}{2} + 1\right) = -\ln 2 - 3\ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

On peut simplifier :

$$-3\ln\left(\frac{3}{2}\right) = -3(\ln 3 - \ln 2) = -3\ln 3 + 3\ln 2,$$

donc

$$f(-\ln 2) = 2\ln 2 - 3\ln 3 = \ln\left(\frac{4}{27}\right).$$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\ln\left(\frac{4}{27}\right)$	$\searrow$	

Exercice 4

On considère g définie sur $]0; e^8]$ par

$$g(x) = \frac{5 - \ln(x)}{x}.$$

1. **Calculer $g(1)$, $g(e^5)$ et $g(e^8)$.**

$$g(1) = \frac{5 - \ln(1)}{1} = \frac{5 - 0}{1} = 5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{g(1) = 5}.$$

$$g(e^5) = \frac{5 - \ln(e^5)}{e^5} = \frac{5 - 5}{e^5} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{g(e^5) = 0}.$$

$$g(e^8) = \frac{5 - \ln(e^8)}{e^8} = \frac{5 - 8}{e^8} = -\frac{3}{e^8} \quad \Rightarrow \quad \boxed{g(e^8) = -\frac{3}{e^8}}.$$

2. **Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$.**

Quand $x \to 0^+$, $\ln(x) \to -\infty$, donc $5 - \ln(x) \to +\infty$ et $x \to 0^+$. Ainsi

$$g(x) = \frac{5 - \ln(x)}{x} \longrightarrow +\infty.$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty}.$$

3. (a) **Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a : $g'(x) = \dfrac{\ln(x) - 6}{x^2}$.**

On écrit $g(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 5 - \ln(x)$ et $v(x) = x$. Alors $u'(x) = -\dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$.
Par la formule du quotient :

$$g'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{\left(-\frac{1}{x}\right) \cdot x - (5 - \ln(x)) \cdot 1}{x^2} = \frac{-1 - 5 + \ln(x)}{x^2} = \frac{\ln(x) - 6}{x^2}.$$

Donc

$$\boxed{g'(x) = \frac{\ln(x) - 6}{x^2}} \quad (x > 0).$$

(b) **Résoudre sur $]0; e^8[$ l'inéquation $\ln(x) > 6$.**
Comme ln est croissante sur $]0, +\infty[$:

$$\ln(x) > 6 \iff x > e^6.$$

En intersectant avec $]0; e^8[$:

$$\boxed{x \in]e^6; e^8[}.$$

(c) **En déduire le tableau de signes de g' sur $]0; e^8]$.**
Sur $]0; e^8]$, on a $x^2 > 0$, donc le signe de $g'(x)$ est celui de $\ln(x) - 6$:

$$\ln(x) - 6 \begin{cases} < 0 & \text{si } 0 < x < e^6, \\ = 0 & \text{si } x = e^6, \\ > 0 & \text{si } e^6 < x \leq e^8. \end{cases}$$

x	0^+		e^6		e^8
$\ln(x) - 6$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

4. **Tableau de variation complet de g sur $]0; e^8]$.**
D'après la question précédente, g' est négative sur $]0, e^6[$ puis positive sur $]e^6, e^8]$:

$$g \text{ décroît sur }]0, e^6] \quad \text{et croît sur } [e^6, e^8].$$

On rassemble les informations nécessaires :

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty, \qquad g(e^6) = \frac{5 - \ln(e^6)}{e^6} = \frac{5 - 6}{e^6} = -\frac{1}{e^6}, \qquad g(e^8) = -\frac{3}{e^8}.$$

Ainsi, g admet un minimum en $x = e^6$ de valeur $-\dfrac{1}{e^6}$.

x	0^+		e^6		e^8
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{e^6}$	$\nearrow$	$-\dfrac{3}{e^8}$