Exercice 1

Soit la suite v définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 280 \\ v_{n+1} = 0,9v_n + 42 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Calculer les valeurs exactes de v_1 et v_2.
2. Déterminer la constante c telle que $c = 0,9c + 42$.
3. On considère la suite auxiliaire u définir pour tout entier naturel n par $u_n = v_n - c$.
   - **a.** Calculer u_0.
   - **b.** Démontrer que la suite u est géométrique de raison $0,9$.
   - **c.** Donner une expression explicite de u_n en fonction de n.
   - **d.** En déduire que pour tout entier naturel n, on a $v_n = 420 - 140 \times 0,9^n$.
4. Déterminer avec la calculatrice le plus petit entier naturel n tel que $v_n > 419$.
5. Existe-t-il un entier n tel que $v_n \geqslant 420$?
6. Conjecturer la limite de la suite v.

Exercice 2

Corrigé : https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Corrige_ES_Polynesie_sept_2020_DV_2.pdf

Au 31 décembre 2017, un magazine possède 450 000 abonnés. On note que chaque année, seuls 80 % des abonnés de l'année précédente renouvellent leur abonnement auxquels viennent s'ajouter 180 000 nouveaux abonnés.

On note (u_n) une suite modélisant le nombre d'abonnés, exprimé en millier, au 31 décembre de l'année $(2017 + n)$. On a donc $u_0 = 450$.

1. Calculer, selon ce modèle, le nombre d'abonnés au 31 décembre 2018.
2. Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,8u_n + 180$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 900$.
   - **a.** Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,8$. Préciser son premier terme.
   - **b.** Soit n un entier naturel. Exprimer v_n en fonction de n.
   - **c.** Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = -450 \times 0,8^n + 900$.
4. La direction du magazine affirme qu'à long terme, le nombre d'abonnés dépassera 900 000. Que penser de cette affirmation ? Justifier la réponse.
5. En s'appuyant sur ce modèle, au 31 décembre de quelle année le nombre d'abonnés dépassera-t-il 800 000 pour la première fois ?

Corrigés (générés par IA puis relus)

Exercice 1

On considère la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 280, \\ v_{n+1} = 0,9v_n + 42 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Calcul des premières valeurs

On a :

$$v_1 = 0,9v_0 + 42 = 0,9 \times 280 + 42 = 252 + 42 = 294.$$

Puis :

$$v_2 = 0,9v_1 + 42 = 0,9 \times 294 + 42 = 264,6 + 42 = 306,6.$$

2. Détermination de la constante c

On cherche c tel que :

$$c = 0,9c + 42.$$

On obtient :

$$c - 0,9c = 42 \iff 0,1c = 42 \iff c = 420.$$

3. Étude de la suite auxiliaire (u_n)

On définit $u_n = v_n - c = v_n - 420$.

a. Calcul de u_0.

$$u_0 = v_0 - 420 = 280 - 420 = -140.$$

b. Mise en évidence d'une suite géométrique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = v_{n+1} - 420 = (0,9v_n + 42) - 420.$$

Or $42 - 420 = -378$, donc :

$$u_{n+1} = 0,9v_n - 378.$$

On exprime $v_n = u_n + 420$, donc :

$$u_{n+1} = 0,9(u_n + 420) - 378 = 0,9u_n + 378 - 378 = 0,9u_n.$$

Ainsi (u_n) est une suite géométrique de raison $0,9$.

c. Expression explicite de u_n. La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = -140$ et de raison $0,9$, donc :

$$u_n = u_0 \times (0,9)^n = -140 \times (0,9)^n.$$

d. Expression explicite de v_n. Comme $v_n = u_n + 420$, on obtient :

$$v_n = -140 \times (0,9)^n + 420.$$

4. Recherche du plus petit n tel que $v_n > 419$

On cherche n tel que :

$$-140 \times (0,9)^n + 420 > 419.$$

Cela équivaut à :

$$-140 \times (0,9)^n > -1.$$

En divisant par -140 (nombre négatif), l'inégalité s'inverse :

$$(0,9)^n < \frac{1}{140}.$$

Or $(0,9)^n$ décroit vers 0. On utilise la calculatrice :

$$(0,9)^{57} \approx 0,0023 \quad \text{et} \quad (0,9)^{58} \approx 0,0021.$$

Comme $\frac{1}{140} \approx 0,0071$, on voit que dès $n = 57$, l'inégalité est vérifiée. Ainsi, le plus petit entier est $n = 57$.

5. Existence d'un entier n tel que $v_n \geq 420$

On a pour tout n :

$$v_n = -140 \times (0,9)^n + 420.$$

Comme $(0,9)^n > 0$ pour tout n, on a $-140 \times (0,9)^n < 0$. Donc :

$$v_n < 420 \quad \text{pour tout } n.$$

Ainsi, il n'existe aucun entier n tel que $v_n \geq 420$.

6. Limite de la suite (v_n)

On peut conjecturer que $\lim\limits_{n \to \infty} v_n = 420$.
Dans un prochain chapitre, on le démontrera ainsi :
$\lim\limits_{n \to \infty} (0,9)^n = 0$, donc :

$$\lim_{n \to \infty} v_n = \lim_{n \to \infty} \big(-140 \times (0,9)^n + 420\big) = 0 + 420 = 420.$$

Exercice 2

On considère un magazine possédant 450 000 abonnés au 31 décembre 2017. On note u_n (en milliers) le nombre d'abonnés au 31 décembre de l'année $2017 + n$, avec $u_0 = 450$.

1. Nombre d'abonnés au 31 décembre 2018

$$u_1 = 0,8u_0 + 180 = 0,8 \times 450 + 180 = 360 + 180 = 540.$$

Donc le nombre d'abonnés est 540 000.

2. Relation de récurrence

Chaque année, 80% des abonnés restent et on ajoute 180 000 nouveaux abonnés, soit 180 milliers. Ainsi :

$$u_{n+1} = 0,8u_n + 180 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

3. Étude de la suite (v_n)

On définit $v_n = u_n - 900$.

a. Mise en évidence d'une suite géométrique.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 900 = (0,8u_n + 180) - 900 = 0,8u_n - 720.$$

Or $u_n = v_n + 900$, donc :

$$v_{n+1} = 0,8(v_n + 900) - 720 = 0,8v_n + 720 - 720 = 0,8v_n.$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison $0,8$. Son premier terme est :

$$v_0 = u_0 - 900 = 450 - 900 = -450.$$

b. Expression de v_n. Comme (v_n) est géométrique de premier terme -450 et de raison $0,8$, on a :

$$v_n = -450 \times (0,8)^n.$$

c. Expression de u_n. Comme $u_n = v_n + 900$, on obtient :

$$u_n = -450 \times (0,8)^n + 900.$$

4. Analyse de l'affirmation de la direction

Pour tout entier naturel n on a $u_n = -450 \times (0,8)^n + 900$.
Or on a $-450 \times (0,8)^n < 0$ donc $-450 \times (0,8)^n + 900 < 900$ donc $u_n < 900$.
L'affirmation de la direction que le nombre d'abonnés dépassera 900 000 à long terme est donc fausse.

5. Première année où les abonnés dépassent 800 000

On cherche n tel que :

$$u_n > 800 \iff -450 \times (0,8)^n + 900 > 800.$$

Cela revient à :

$$-450 \times (0,8)^n > -100.$$

En divisant par -450 (nombre négatif), on inverse l'inégalité :

$$(0,8)^n < \frac{100}{450} = \frac{2}{9} \approx 0,2222.$$

Or, $(0,8)^9 \approx 0,134$ et $(0,8)^8 \approx 0,168$. Dès $n = 8$, la condition est vérifiée.
Ainsi, au 31 décembre $2017 + 8 = 2025$, le nombre d'abonnés dépassera 800 000 pour la première fois.