Corrigé des exemples du cours
Chapitre 1 : suites révisions.

Capacité 1 ***Modéliser une situation par une suite***

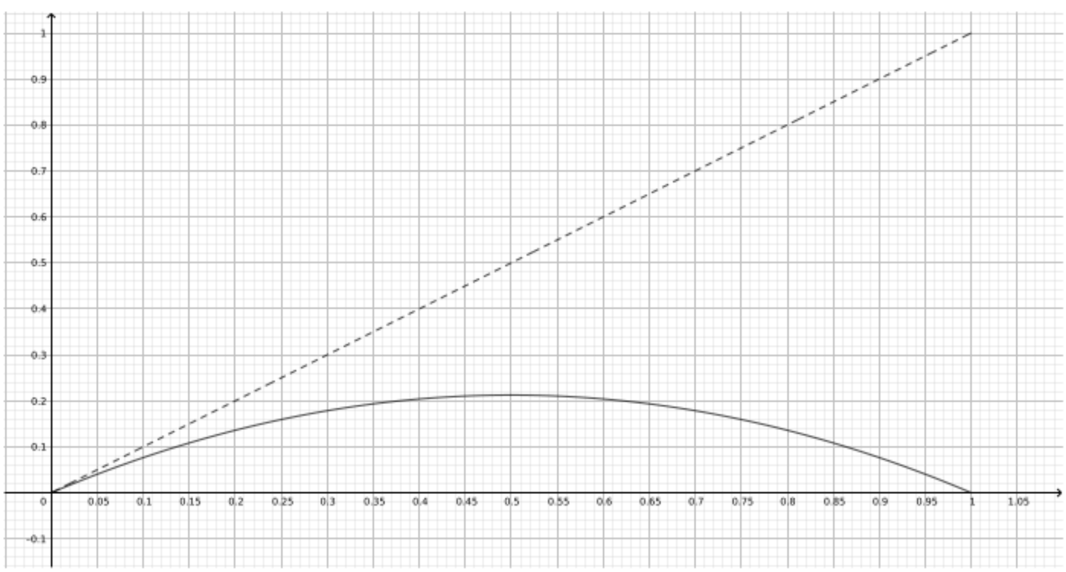
On s'intéresse à une population de phoques vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante.
Au début de l'an 2000, on comptait 500 phoques. Une étude a permis de modéliser ce nombre de phoques par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 0{,}5 \\ u_{n+1} & = & 0{,}85u_n(1-u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre de phoques, en milliers, au début de l'année $2000+n$.
Dans les calculs, on arrondira les nombres de phoques à l'unité.

1. Calculer, dans ce modèle, le nombre de phoques au début de l'année 2001 puis de l'année 2002.

2. On a représenté sur le graphique ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction définie sur $[0;1]$ par $f : x \longmapsto 0{,}85x(1-x)$ et la droite Δ d'équation $y = x$.



1)

• Nombre de phoques en 2001 : $u_1 = 0{,}85\,u_0(1-u_0) = 0{,}85\times 0{,}5\times(1-0{,}5)$

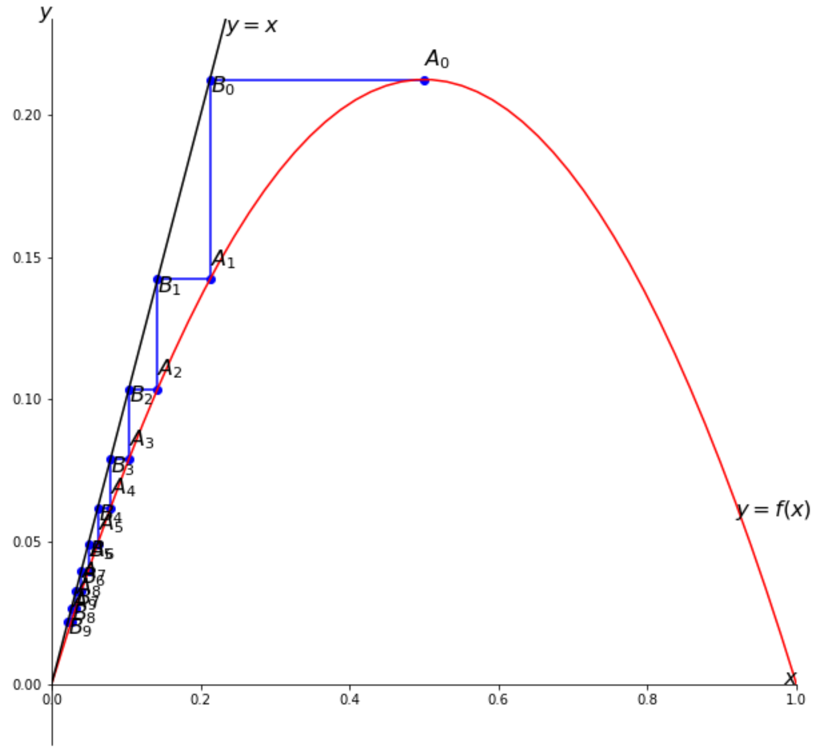
$u_1 = 0{,}85 \times 0{,}25 = 0{,}2125$ milliers

soit environ 213 à l'unité mais par excès

• Nombre de phoques en 2002 : $u_2 = 0{,}85\,u_1(1-u_1)$

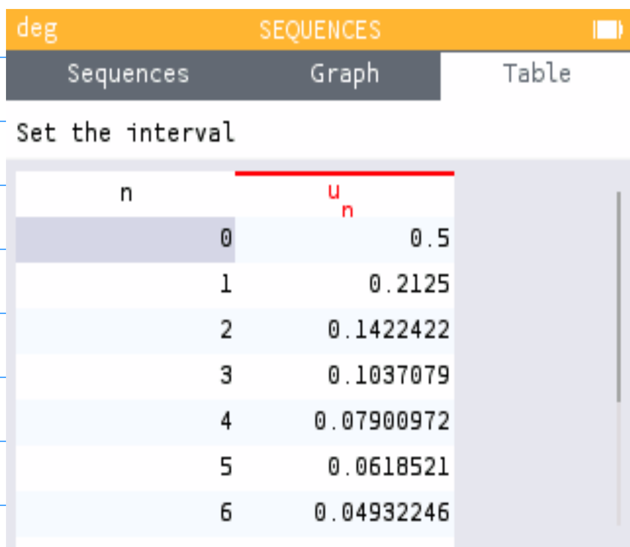
$u_2 = 0{,}85\times 0{,}2125\times(1-0{,}2125) \approx 0{,}142$ milliers

2)



y
y = x
A_0
B_0
A_1
B_1
A_2
B_2
A_3
B_3
A_4
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
x
y = f(x)

3) a)



deg
SEQUENCES
Sequences
Graph
Table
Set the interval
n
u_n
0 0.5
1 0.2125
2 0.1422422
3 0.1037079
4 0.07900972
5 0.0618521
6 0.04932246

3. **a.** Calculer des valeurs approchées des dix premiers termes de la suite (u_n) avec le mode suite de sa calculatrice.

   b. Reporter les premiers termes dans la capture de feuille de tableur ci-dessous. Quelle formule faudrait-il saisir en A3 et B3 pour compléter la feuille de calcul?

   En A3 : = A2+1 et en B3 : = 0,85* B2*(1-B2)

	A	B
1	n	u_n
2	0	0,5
3	1	...
4	2	...
5	3	...

   c. Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle renvoie une liste avec les n premiers termes de la suite (u_n) :

```
def liste_valeurs(n):
    u = 0.5
    L = [u]
    for k in range(n - 1):
        u = 0.85*u*(1-u)
        L.append(u)
    return L
```

4. Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la limite de la suite (u_n)?

   En donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

On peut conjecturer que la suite (u_n) converge vers 0 et que la population de phoques va s'éteindre

Capacité 4 *Étudier une suite géométrique*

Un globe-trotter a comme objectif de parcourir 2000 km à pied. Il peut parcourir 40 km en une journée, mais, la fatigue s'accumulant, la distance qu'il parcourt diminue de 3 % chaque nouvelle journée.
On note la distance D_n la distance parcourue durant le n-ième jour.
Le premier jour de son périple, il parcourt donc $D_1 = 40km$.

1. Calculer la distance parcourue le deuxième jour.
2. Quelle est la nature de la suite (D_n) ? Donnez ses éléments caractéristiques.
3. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, déterminer l'expression de D_n en fonction de n.
4. Pour calculer le nombre de jours qu'il faudra au globe-trotter pour atteindre son objectif, on a écrit la fonction Python suivante :

```
def nb_jours():
    j = 1
    u = 40
    S = 40
    while S<2000 :
        u = 0.97 * u
        S = S + u
        j = j+1
    return j
```

   Compléter les deux lignes incomplètes de cette fonction.

5. Déterminer une expression en fonction de n de la distance totale T_n parcourue au bout de n jours :

$$T_n = D_1 + D_2 + \ldots + D_n$$

6. Réaliser un tableau de valeurs de T_n avec le mode suite de sa calculatrice et en déduire le nombre de jours qu'il qu'il faudra au globe-trotter pour atteindre son objectif.

1) La distance parcourue le 2ème jour est de :

$$D_2 = D_1 - \frac{3}{100} \times D_1 = D_1 \times \left(1 - \frac{3}{100}\right)$$

$$D_2 = D_1 \times 0{,}97 = 40 \times 0{,}97 = 38{,}8 \text{ km}$$

2) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$D_{n+1} = D_n - \frac{3}{100} \times D_n = 0{,}97\, D_n$$

La suite (D_n) est donc géométrique de raison $0{,}97$.

3) D'après une propriété du cours, on peut donner une expression directe de D_n en fonction de n :

Pour tout entier $n \geq 1$, $D_n = D_1 \times 0{,}97^{n-1}$

$$\text{donc} \quad D_n = 40 \times 0{,}97^{n-1}$$

5) Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$T_n = D_1 + D_2 + \dots + D_n$

D'après une propriété du cours sur la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique, on a :

$$T_n = 1^{er}\text{ terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nb termes}}}{1 - \text{raison}}$$

$$T_n = 40 \times \frac{1 - 0{,}97^n}{1 - 0{,}97}$$

$$T_n = \frac{4000}{3} \times (1 - 0{,}97^n)$$

deg SEQUENCES

Sequences | Graph | Table

Set the interval

n	u_n
0	0
1	40
2	78.8
3	116.436
4	152.9429
5	188.3546
6	222.704
7	[illegible]

On peut observer que le coureur atteindra son objectif au bout de 6 jours.

Thème 1 ***Thème modélisation par une suite arithmético-géométrique (1/2), exo résolu 15 p. 37***

Un magazine est vendu uniquement par abonnement. On a constaté que :

- il y a 1 800 nouveaux abonnés chaque année ;
- d'une année sur l'autre, 15 % des abonnés ne se réabonnent pas.

En 2008, il y avait 8 000 abonnés.

1. Justifier si u_n désigne le nombre de milliers d'abonnés en $(2008+n)$, cette situation peut être modélisée par la suite arithmético-géométrique (u_n) définie par :

$$u_0 = 8 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 0,85u_n + 1,8.$$

1)

Année n | Année $n+1$

$$u_n \xrightarrow{-15\%} 0,85\,u_n \xrightarrow{+1800} 0,85\,u_n + 1800$$

car 15% des anciens abonnés ne se réabonnent pas

car 1800 nouveaux abonnés

On en déduit que pour tout entier $n \geq 0$, on a :

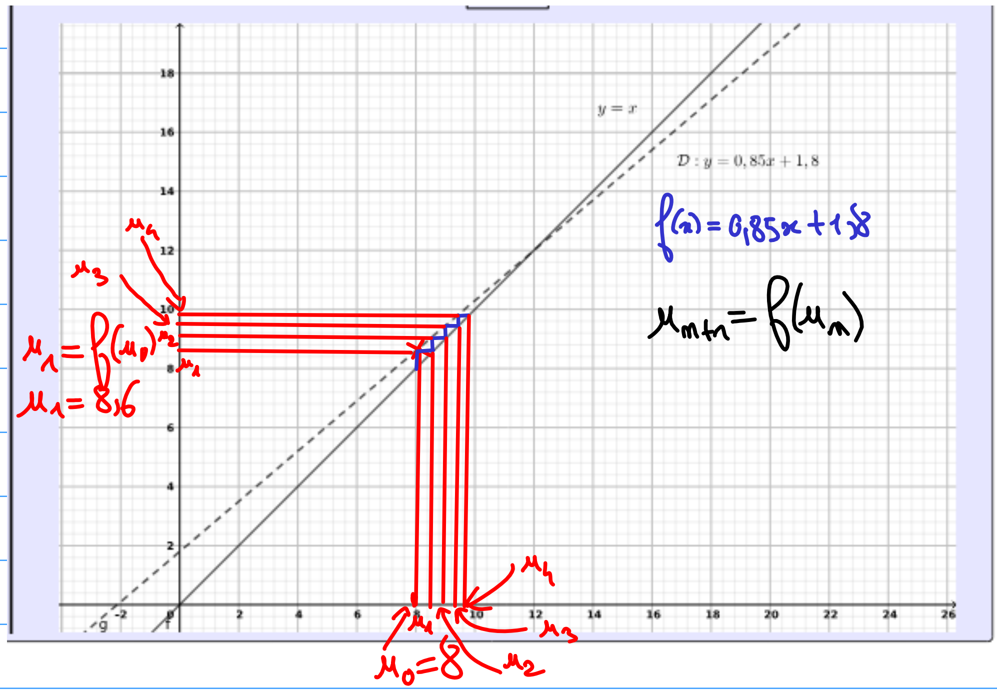
$$u_{n+1} = 0,85\,u_n + 1800$$

2. Dans le graphique en Annexe, on a représenté les droites $\mathscr{D}$ et Δ d'équations respectives :

$$y = 0,85x + 1,8 \quad \text{et} \quad y = x$$

Construire les quatre premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses en appliquant l'algorithme suivant :

- Étape 1 : on place $u_0 = 8$ sur l'axe des abscisses ;
- Étape 2 : on construit l'ordonnée $u_1 = 0,85u_0 + 1,8$ du point de $\mathscr{D}$ d'abscisse u_0 sur l'axe des ordonnées et on le projette sur l'axe des abscisses en prenant l'abscisse du point de la droite Δ dont il est l'ordonnée, puis on reprend l'étape 1 avec u_1 ;



rad SEQUENCES

Sequences | Graph | Table

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n \times 0.85+1.8 \\ u_0 = 8 \end{cases}$$

Add a sequence

Plot graph | Display values

rad SEQUENCES

Sequences | Graph | Table

Set the interval

n	u_n
3	9.5435
4	9.911975
5	10.22517875
6	10.49140194
7	10.71769165
8	10.9100379
9	11.07353221
10	11.21250238

On peut conjecturer que la suite u est croissante et a pour limite 12.

Thème 2 ***Thème modélisation par une suite arithmético-géométrique (2/2), exo résolu 15 p. 37***

On poursuit l'étude du Thème 1 d'une suite u modélisant un nombre d'abonnements, définie par :

$$u_0 = 8 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 0,85u_n + 1,8.$$

1. Déterminer la constante c vérifiant la relation de récurrence de la suite u.
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - c$.
   a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b. En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de v_n en fonction de n.
   c. Démontrer que pour tout entier naturel n on a $u_n = 12 - 4 \times 0,15^n$.
   d. Démontrer la conjecture faite dans le Thème 1 sur le sens de variation de la suite u.

1) On résout l'équation d'inconnue c :

$$c = 0,85c + 1,8$$

$$\xrightarrow{-0,85c} \quad 0,15c = 0 + 1,8$$

$$\xrightarrow{\div 1,8} \quad c = \frac{1,8}{0,15} = \frac{180}{15} = \frac{36}{3} = 12$$

La constante c vérifiant la relation de récurrence de la suite u est $c = 12$.

2) Pour tout entier $n \geq 0$, on définit :

$$v_n = u_n - 12$$

a) Pour tout entier $n \geq 0$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 12$$

Or $u_{n+1} = 0,85\, u_n + 1,8$

donc $v_{n+1} = 0,85\, u_n + 1,8 - 12$

$$v_{n+1} = 0,85\, u_n - 10,2$$

$$v_{n+1} = 0,85 \left(u_n - \frac{10,2}{0,85} \right)$$

$$v_{n+1} = 0,85 \left(u_n - \frac{3,4 \times 3}{5 \times 0,17} \right)$$

$$v_{n+1} = 0,85 \left(u_n - \frac{1,7 \times 2 \times 3}{5 \times 0,17} \right)$$

$$v_{n+1} = 0,85 \times \left(u_n - \frac{10 \times 2 \times 3}{5} \right)$$

$$v_{n+1} = 0,85 \times (u_n - 12)$$

$$v_{n+1} = 0,85(u_n - 12)$$

donc $\boxed{v_{n+1} = 0,85\, v_n}$

On en déduit que la suite v est géométrique de raison 0,85.

b) Par propriété des suites géométriques, on a pour tout entier $n \geq 0$:

$$v_n = v_0 \times q^n$$

$$v_n = v_0 \times 0,85^n \quad \text{avec } q = 0,85$$

or $v_0 = u_0 - 12 = 8 - 12 = -4$

donc $\boxed{v_n = -4 \times 0,85^n}$

c) Pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$v_n = u_n - 12$

donc $u_n = v_n + 12$

d'après la question précédente

$$\boxed{u_n = -4 \times 0{,}85^n + 12}$$

d) Pour tout entier $n \geq 0$

on a :

$0{,}85 < 1$

$\times 0{,}85^n$ donc $0{,}85 \times 0{,}85^n < 0{,}85^n$ $\times 0{,}85^n$

$0{,}85^{n+1} < 0{,}85^n$

$\times(-4)$ $-4 \times 0{,}85^{n+1} > -4 \times 0{,}85^n$ $\times(-4)$

$+12$ $\qquad$ $+12$

$12 - 4 \times 0{,}85^{n+1} > 12 - 4 \times 0{,}85^n$

donc $u_{n+1} > u_n$

La suite u est donc
croissante.