1 Définition et propriétés algébriques

1.1 Définition

Théorème-Définition 1

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction s'appelle **fonction exponentielle** et se note **exp**.
Ainsi pour tout réel x, on a $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$.

1.2 Propriétés algébriques

Théorème 2 ***Relation fonctionnelle***

Pour tous réels x et y, on a : $\boxed{\exp(x) \times \exp(y) = \exp(x+y)}$.

Corollaire ***propriétés algébriques***

Pour tous réels x et y on a :

$$\boxed{\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}} \quad (1)$$

$$\boxed{\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}} \quad (2)$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ \exp(nx) = (\exp(x))^n} \quad (3)$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{Z},\ \exp(nx) = (\exp(x))^n} \quad (4)$$

$$\boxed{\exp(x) > 0} \quad (5)$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{Z},\ \exp(nx) = (\exp(x))^n} \quad (6)$$

$$\boxed{\exp(x) > 0} \quad (7)$$

2 Notation e^x

2.1 Nombre d'Euler et notation e^x

Définition 1

L'image de 1 par la fonction exponentielle est le **nombre d'Euler**.
On note $\boxed{\exp(1) = e}$ et on a $\boxed{e \approx 2,718}$.

Remarque 1

D'après le corollaire du théorème 2, pour tout réel x et pour tout entier naturel n, on a $\exp(nx) = (\exp(x))^n$.
En particulier, pour $x = 1$, on a pour tout entier relatif, $\exp(n) = (\exp(1))^n = e^n$ avec la notation $\exp(1) = e$ du nombre d'Euler.
Par extension de cette égalité, on note pour tout réel x : $\exp(x) = \mathbf{e}^x$.
Désormais nous noterons e^x l'image d'un réel x par la fonction exponentielle.
On peut reformuler les propriétés algébriques de la fonction exponentielle avec cette nouvelle notation.

¿

Propriété 1

Pour tous réels x et y et tout entier relatif n :

$$\mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \qquad \mathrm{e}^0 = 1 \qquad \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x+y}$$

$$\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x} \qquad \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y} = \mathrm{e}^{x-y} \qquad (\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$$

2.2 Fonction exponentielle et suites géométriques

Propriété 2

Pour tout réel a, la suite $\left(\mathrm{e}^{na}\right)_{n\geqslant 0}$ est géométrique de raison e^a.

3 Étude de la fonction exponentielle

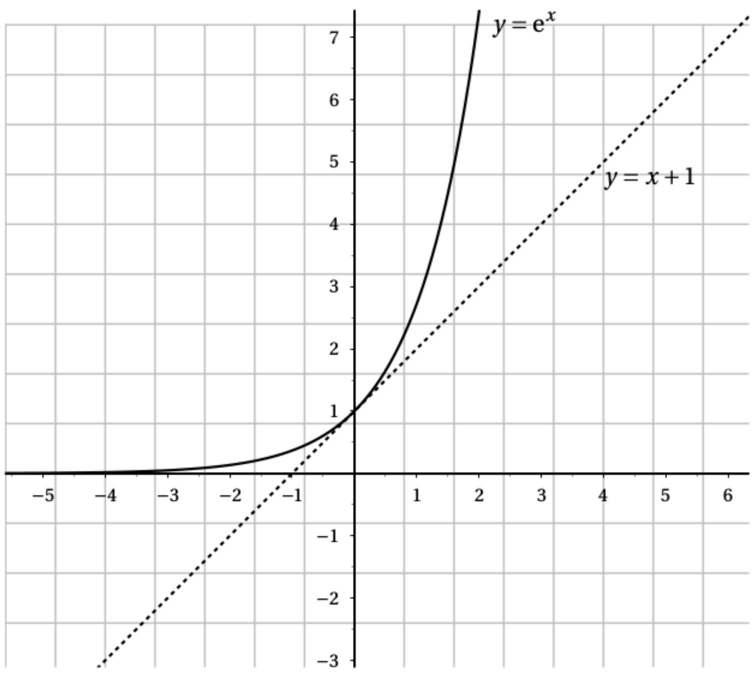
Propriété 3

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^x > 0$.

Propriété 4

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x	$\nearrow$	1	$\nearrow$



4 Capacités

Capacité 1 ***Étudier une fonction*** $g : x \longmapsto ae^x + bx + c$

On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $f(x) = \mathrm{e}^x$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
2. On considère la fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$, définie par $g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$. On note g' la fonction dérivée de g.
   - **a.** Soit x un réel, déterminer une expression de $g'(x)$.
   - **b.** Étudier le signe de g' sur $\mathbb{R}$.
   - **c.** En déduire les variations de g sur $\mathbb{R}$.
   - **d.** Dresser le tableau de variation de g et la valeur de son minimum.
   - **e.** En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.
   - **f.** Quelle propriété peut-on en déduire pour la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à sa tangente $\mathscr{T}$ au point d'abscisse 0 ?

Capacité 2 ***utiliser les propriétés algébriques pour étudier une suite géométrique***

On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{\mathrm{e}^3 \times \left(\mathrm{e}^2\right)^n}{\mathrm{e}^{-3n+6}}$$

1. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3 .
2. Calculer les quotients $\frac{u_1}{u_0}$, $\frac{u_2}{u_1}$ et $\frac{u_3}{u_2}$. Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de la suite u ?
3. Démontrer la conjecture précédente.