

 **Histoire 1**

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) est un mathématicien et physicien français dont les travaux portèrent dans tous les domaines mathématiques. Il nous a laissé en particulier la notation $f'(x)$ pour la fonction dérivée, la notation indicielle u_n pour les suites et le lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation d'une fonction. En arithmétique des entiers, il résolut la difficile équation de Pell $x^2 - ay^2 = \pm 1$ en introduisant les fractions continues. Après avoir succédé à Euler à l'Académie des sciences de Berlin, il siégea dans la commission du système métrique sous la Révolution, il est inhumé au Panthéon.

1 Rappels sur la dérivation

1.1 Nombre dérivé et tangente

 **Définition 1**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , a un réel appartenant à I et h un réel différent de 0 tel que $a + h$ appartient à I .

f est dérivable en a si $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$, tend vers un nombre lorsque h tend vers 0.

Ce nombre est le **nombre dérivé** ou **dérivée** de f en a , il est noté $f'(a)$.

C'est la limite de $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0 et on note : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$.

Si $y = f(x)$ on peut utiliser la notation de **Leibniz** $\frac{dy}{dx}$ pour la dérivée $f'(x)$ de f en x .

 **Définition 2**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , soit a un réel appartenant à I et h un réel non nul tel que $a + h$ appartient à I .

On considère les points $A(a; f(a))$ et $M_h(a+h; f(a+h))$ de la courbe \mathcal{C}_f dans un repère du plan.

Si f est dérivable en a , lorsque h tend vers 0, les sécantes (AM_h) à \mathcal{C}_f tendent vers une position limite qui est la droite passant par le point $A(a; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.

Cette droite, « **limite des sécantes** », est appelée **tangente à \mathcal{C}_f en $A(a; f(a))$** .

 **Propriété 1**

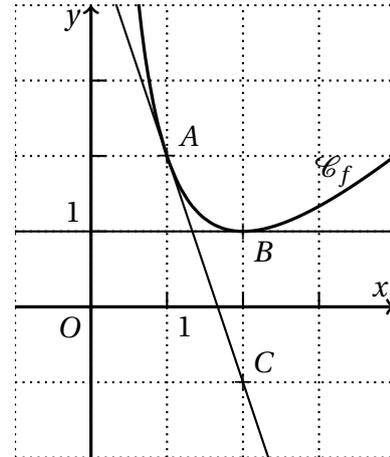
Soit f une fonction dérivable en a , une équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$f'(x)$ est le **coefficient directeur** de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a .

Capacité 1 Déterminer graphiquement un nombre dérivé et une équation de tangente, exo résolu 1 p.89

On considère une fonction f définie sur $]0; +\infty[$ et dérivable en 1 et en 2. On a représenté ci-contre la courbe de f et ses tangentes aux points A et B d'abscisses respectives 1 et 2.



1. Le nombre dérivé de f en 2 a pour valeur :

a. 2

b. 1

c. 0

d. $\frac{1}{2}$

2. Une équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point A est :

a. $y = -\frac{1}{3}x + 2$

b. $y = 3x + \frac{5}{3}$

c. $y = 5 - 3x$

d. $y = -3x + \frac{5}{3}$

1.2 Fonction dérivable sur un intervalle

Définition 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Si f est dérivable en tout point a de I , on dit que f est dérivable sur I , et on appelle **fonction dérivée** de f , notée f' , la fonction f' définie par :

$$f' : a \mapsto f'(a)$$

Capacité 2 Déterminer une équation de tangente, connaître des exemples de fonctions non dérivables en un point

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x$. On rappelle que f est dérivable sur \mathbb{R} et que pour tout réel x , on a $f'(x) = f(x)$. On note \mathcal{C}_f la courbe de f dans un repère du plan.

a. Déterminer une équation de la tangente \mathcal{T} à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0.

b. Représenter graphiquement \mathcal{T} à \mathcal{C}_f avec sa calculatrice.

Quelle conjecture peut-on faire sur les positions relatives de \mathcal{T} et \mathcal{C}_f ?

c. Démontrer cette conjecture.

2. Est-il vrai que si une fonction g est définie sur un intervalle I alors g est dérivable sur I ?

1.3 Dérivées des fonctions usuelles

f est une fonction dérivable sur \mathcal{D} par rapport à la variable x

Fonction f	Fonction dérivée f'	Ensemble \mathcal{D} de dérivabilité de f
$f(x) = p$ avec $p \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	\mathbb{R}
$f(x) = mx + p$ avec $(m, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$	$f'(x) = m$	\mathbb{R}
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	\mathbb{R}
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	\mathbb{R}
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	\mathbb{R}
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$]0; +\infty[$

TABLE 1 – Dérivées des fonctions usuelles (à compléter en cours d'année)

1.4 Opérations algébriques sur les fonctions dérivables

Soient u et v deux fonctions dérivables par rapport à la variable x sur un intervalle I

Opération sur u et v , $f =$	Fonction dérivée $f' =$	Ensemble de dérivabilité de f
$u + v$	$u' + v'$	I
λu avec $\lambda \in \mathbb{R}$	$\lambda u'$	I
uv	$u'v + uv'$	I
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	I privé des réels x tels que $v(x) = 0$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	I privé des réels x tels que $v(x) = 0$

TABLE 2 – Opérations algébriques sur les fonctions dérivables

Capacité 3 Dériver une somme, un produit, un inverse ou un quotient de fonctions dérivables

Soit les fonctions f et g définies et dérivables sur \mathbb{R} telles que pour tout réel x , on a :

$$f(x) = \frac{x^6}{3} - 2x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = e^x + e$$

Déterminer les expressions des dérivées des fonctions suivantes qui sont dérivables sur \mathbb{R} :

1. $f \times g$

2. g^2

3. $\frac{-2}{g}$

4. $\frac{f}{g}$

2 Compléments sur la dérivation



Propriété 2 Dérivées de fonctions composées, admise

1. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit m et p deux constantes réelles.

Soit J l'intervalle constitué de tous les réels x tels que $mx + p$ appartient à I et soit g la fonction définie sur J par $g(x) = f(mx + p)$.

Si toutes les hypothèses précédentes sont vérifiées alors g est dérivable sur J et pour tout réel x appartenant à J on a :

$$g'(x) = mf'(mx + p)$$

2. Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I alors la fonction \sqrt{u} est dérivable sur I et on a

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

3. Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et si n est un entier naturel, alors la fonction u^n est dérivable sur I et on a

$$(u^n)' = nu'u^{n-1}$$

4. Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors la fonction composée e^u est dérivable sur I et on a

$$(e^u)' = u'e^u$$

Capacité 4 Appliquer les formules de dérivation de fonctions composées, exo résolu 2 p. 89

1. Déterminer une expression de la fonction dérivée de la fonction g dérivable sur $] -0,25; +\infty[$ telle que pour tout réel $x > -0,25$, $g(x) = \sqrt{4x + 1}$.
2. Déterminer une expression de la fonction dérivée de la fonction h dérivable sur \mathbb{R} telle que pour tout réel x , $h(x) = 4e^{-3x+1}$.
3. Déterminer une expression de la fonction dérivée de la fonction k dérivable sur \mathbb{R} telle que pour tout réel x , $k(x) = (e^x + e)^2$.
4. Déterminer une expression de la fonction dérivée de la fonction m dérivable sur \mathbb{R} telle que pour tout réel x , $m(x) = (x^2 + x)^3$.
5. Déterminer une expression de la fonction dérivée de la fonction n dérivable sur \mathbb{R} telle que pour tout réel x , $n(x) = (2x - 1)e^{-x}$.
6. Déterminer une expression de la fonction dérivée de la fonction t dérivable sur \mathbb{R} telle que pour tout réel x , $t(x) = \frac{1}{e^{-2x} + 1}$.

3 Étude des variations d'une fonction

3.1 Du signe de la dérivée au sens de variation de la fonction



Théorème 1 admis

Soit f une fonction monotone et dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} .

Compléter par \leq , $=$ ou \geq .

- Si f est croissante sur I alors pour tout $x \in I$ on a $f'(x) \dots 0$.
- Si f est décroissante sur I alors pour tout $x \in I$ on a $f'(x) \dots 0$.



Théorème 2 admis, réciproque du précédent

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} .

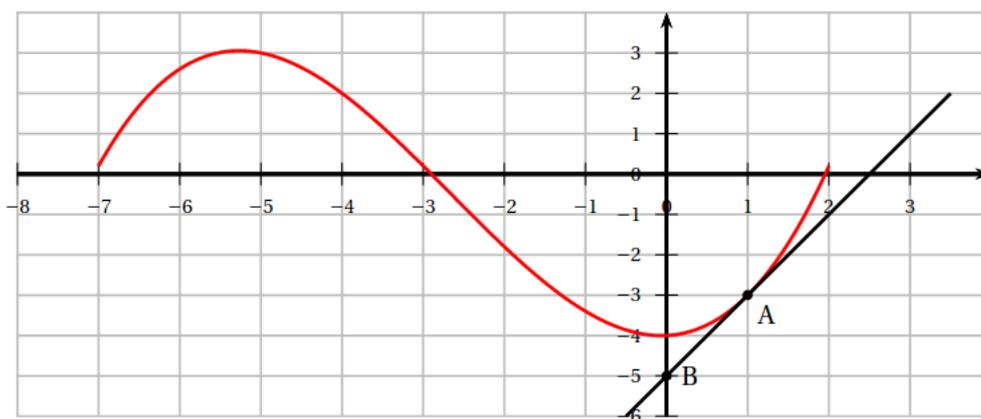
Compléter par \leq , $=$ ou \geq .

- Si pour tout réel x de I on a $f'(x) \dots 0$ alors f est croissante sur I .
- Si pour tout réel x de I on a $f'(x) \dots 0$ alors f est décroissante sur I .

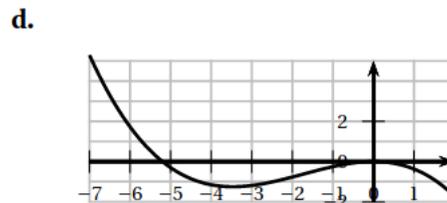
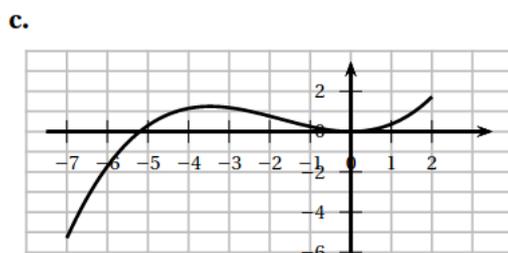
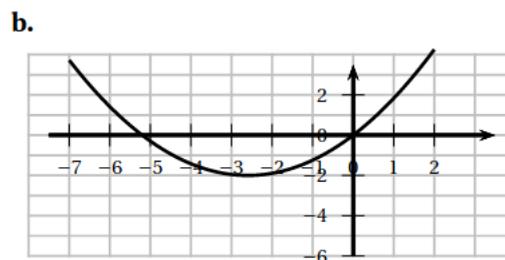
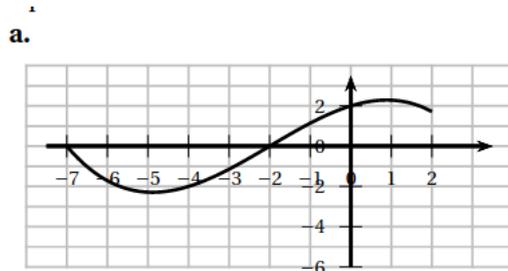
Capacité 5 Exploiter le lien entre signe de la dérivée et sens de variation d'une fonction

La courbe ci-dessous représente une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $[-7 ; 2]$.

La tangente au point $A(1 ; -3)$ coupe l'axe des ordonnées au point $B(0 ; -5)$.



1. L'une des quatre courbes suivantes représente la fonction g' dérivée de la fonction g .
Laquelle?



2. L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point A est :

a. $y = -3x + 1$

b. $y = x - 5$

c. $y = 2x - 5$

d. $y = x - 4$

3.2 Dérivée et recherche d'extremum

Définition 4

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- f admet un **maximum local** en a s'il existe un intervalle J inclus dans I et contenant a , tel que pour tout $x \in J$, $f(x) \leq f(a)$.

f admet un **maximum global** en a si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$.

- f admet un **minimum local** en a s'il existe un intervalle J inclus dans I et contenant a , tel que pour tout $x \in J$, $f(x) \geq f(a)$.

f admet un **minimum global** en a si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(a)$.

Propriété 3 Condition nécessaire, condition suffisante pour avoir un extremum local

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit a un réel appartenant à I .

-  **Condition nécessaire d'extremum local** Si f atteint un extremum local en un réel a qui n'est pas une borne de I , alors $f'(a) = 0$.

-  **Condition suffisante d'extremum local** Si f' s'annule en changeant de signe en a , alors f atteint un extremum local en a .

Thème 1 *Thème modèle défini par une fonction d'une variable, résolution d'un problème d'optimisation, exos résolus 1 et 2 p. 61*

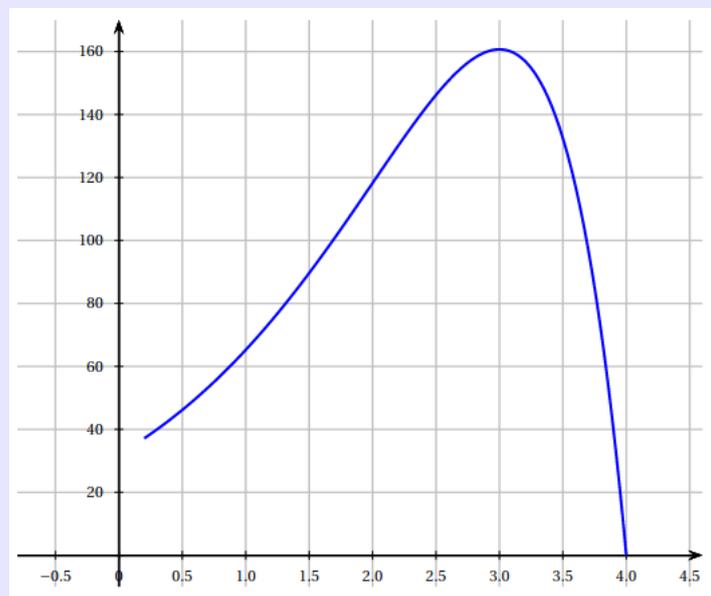
Un rameur est une machine d'exercice physique simulant les mouvements d'une personne qui fait de l'aviron.

Il est souvent utilisé pour l'entraînement sportif afin d'améliorer sa condition physique.

La courbe ci-dessous représente la puissance (en Watt) en fonction du temps (en dixième de seconde) développée par un rameur débutant.

Partie A : Répondre par lecture graphique aux deux questions suivantes

1. Quelle est la puissance maximale atteinte par ce rameur ?
2. Pendant combien de temps la puissance développée reste-t-elle au-dessus de 100 Watts ?



Partie B : Modélisation par une fonction

On suppose que la courbe est la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0, 2 ; 4]$ par :

$$f(x) = (-8x + 32)e^x.$$

On note f' la fonction dérivée de f . On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0, 2 ; 4]$,

1. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0, 2 ; 4]$, $f'(x) = (-8x + 24)e^x$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ puis en déduire les variations de f sur $[0, 2 ; 4]$.
3. Déterminer la valeur exacte du maximum de la fonction f .
4. On suppose que le sportif améliore sa meilleure performance de 5 % tous les mois. Combien de mois d'entraînement seront-ils nécessaires pour qu'il dépasse les 200 W ?

Table des matières

1 Rappels sur la dérivation	1
1.1 Nombre dérivé et tangente	1
1.2 Fonction dérivable sur un intervalle	2
1.3 Dérivées des fonctions usuelles	3
1.4 Opérations algébriques sur les fonctions dérivables	3
2 Compléments sur la dérivation	4
3 Étude des variations d'une fonction	5
3.1 Du signe de la dérivée au sens de variation de la fonction	5
3.2 Dérivée et recherche d'extremum	6