Histoire 1

Johan Jensen (1859 - 1925) est un ingénieur et mathématicien autodidacte danois, qui effectua tous ses travaux mathématiques pendant ses loisirs. Il travailla sur les fonctions convexes et laissa son nom à une inégalité vérifiée par une fonction convexe f et des n-uplets de réels $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $(x_1, \dots, x_n)$.

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Cette inégalité permet de démontrer, avec la concavité de la fonction logarithme, l'inégalité arithmético-géométrique. Pour tout n-uplet de réels positifs $(x_1, \dots, x_n)$, on a :

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

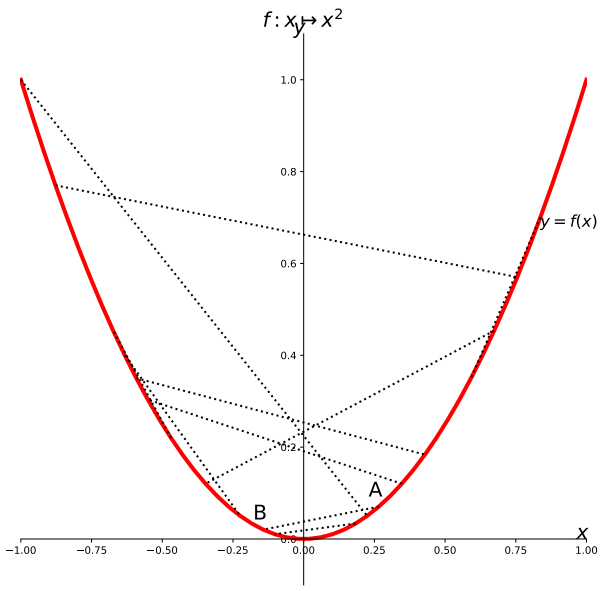
1 Convexité et lecture graphique

Définition 1

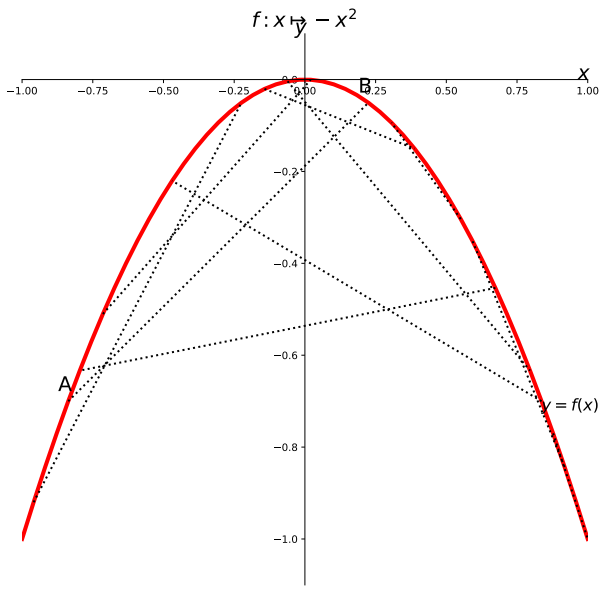
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

- f est **convexe** sur I si et seulement si pour tous points A et B distincts de $\mathscr{C}_f$, la corde [AB] est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$ entre A et B.
- f est **concave** sur I si et seulement si pour tous points A et B distincts de $\mathscr{C}_f$, la corde [AB] est en-dessous de la courbe $\mathscr{C}_f$ entre A et B.

Fonction convexe et cordes



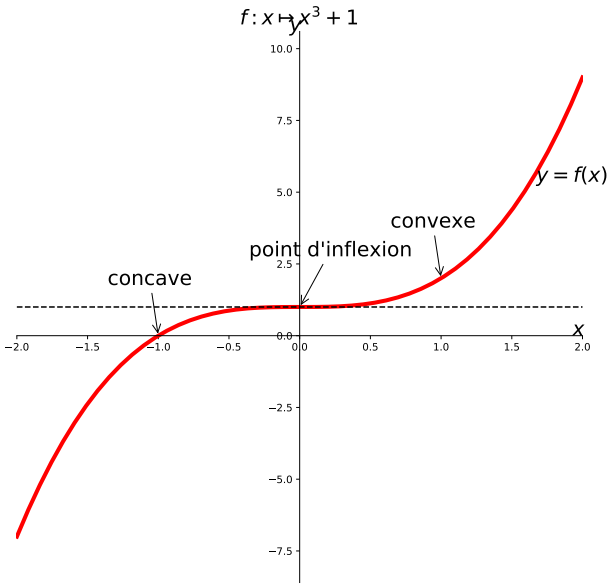
Fonction concave et cordes



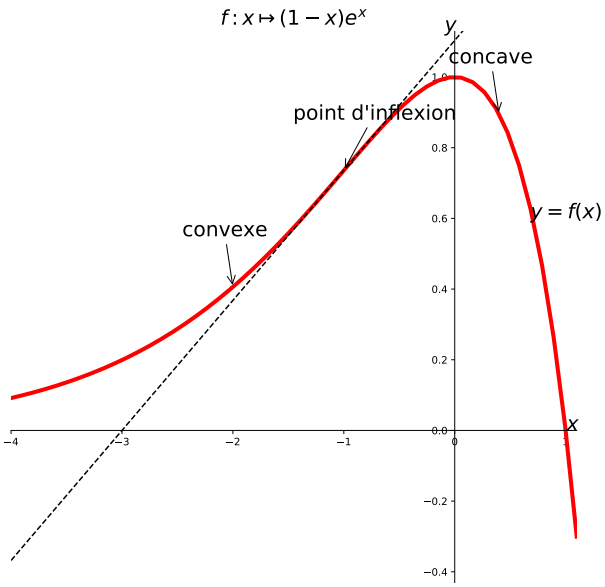
Définition 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère du plan et a un nombre réel appartenant à I.
Le point A de coordonnées $(a\,;\,f(a))$ est un **point d'inflexion** de $\mathscr{C}_f$ si et seulement si $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente au point A.

Point d'inflexion 1



Point d'inflexion 2



Propriété 1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère du plan et a un nombre réel appartenant à I.
Si le point A de coordonnées $(a\,;\,f(a))$ est un **point d'inflexion** de $\mathscr{C}_f$ alors la fonction f change de convexité en a : elle passe de convexe à concave ou de concave à convexe.

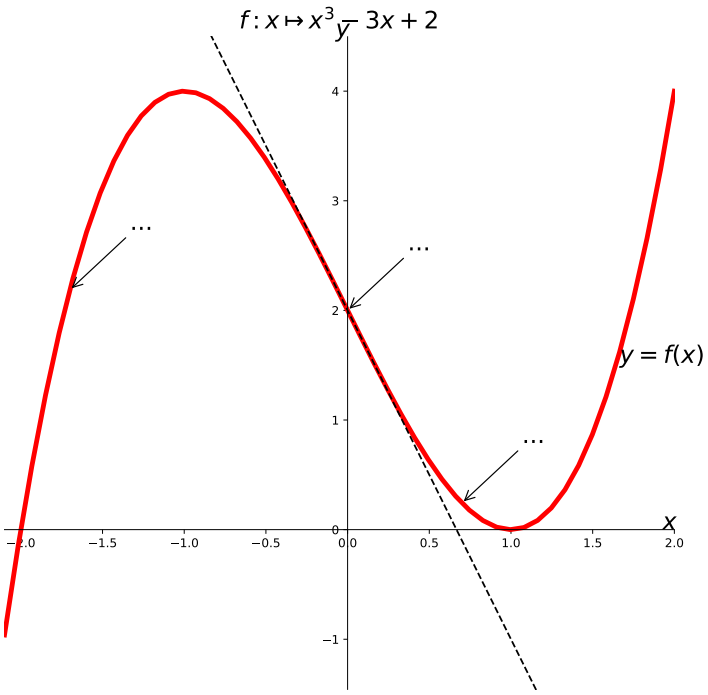
Capacité 1 *Déterminer graphiquement la convexité d'une fonction*

1. Par lecture graphique de leur courbe (représentée si besoin avec la calculatrice), conjecturer la convexité des fonctions suivantes :

   a. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$.
   b. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - x^2$.
   c. h définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = \sqrt{x}$.
   d. m définie sur $\mathbb{R}$ par $m(x) = \mathrm{e}^x$.
   e. c définie sur $\mathbb{R}$ par $r(x) = x^3$.

2. Si f est une fonction convexe sur un intervalle I, que peut-on dire de la fonction $-f$?

3. On a représenté ci-dessous la courbe de la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x + 2$ et sa tangente au point d'abscisse 0. Compléter le graphique ci-dessous en indiquant convexité et point d'inflexion.



2 Convexité et sens de variation de f'

Propriété 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

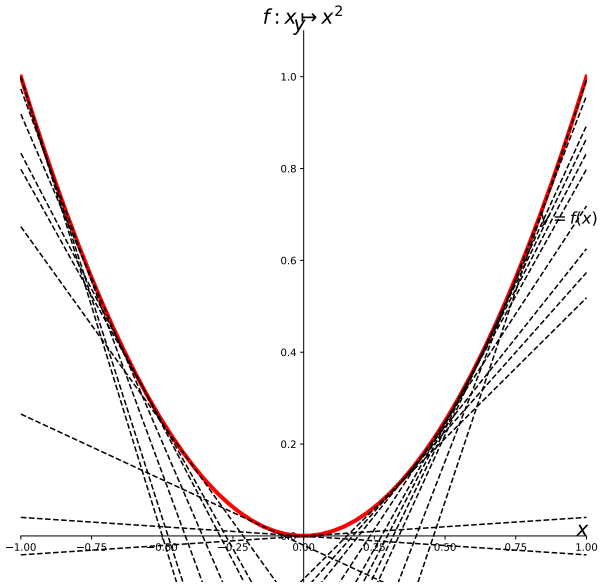
1. f est **convexe** sur I si et seulement si f' est croissante sur I.
2. f est **concave** sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.

Corollaire

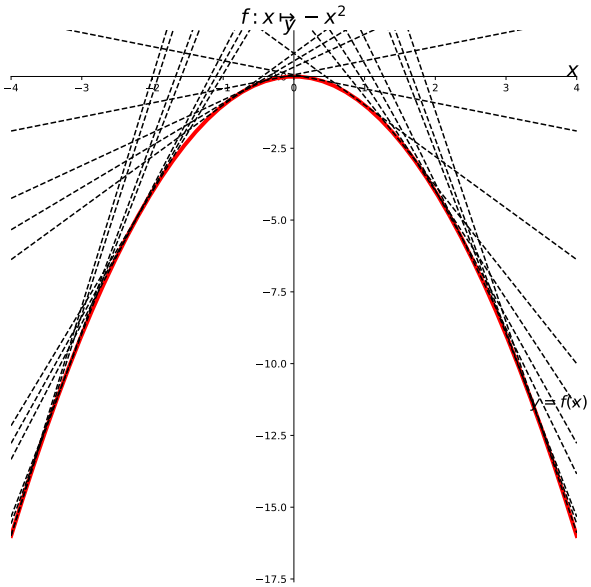
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.

1. Si f est convexe sur I alors $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de chacune de ses tangentes.
2. Si f est concave sur I alors $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de chacune de ses tangentes.

Fonction convexe et tangentes



Fonction concave et tangentes



Capacité 2 *Lien entre convexité et sens de variation*

Compléter les phrases :

- Si f est convexe et croissante sur un intervalle I, alors f croît de plus en plus ....
- Si f est convexe et décroissante sur un intervalle I, alors f décroît de plus en plus ....
- Si f est concave et croissante sur un intervalle I, alors f croît de plus en plus ....
- Si f est concave et décroissante sur un intervalle I, alors f décroît de plus en plus ....

3 Convexité et signe de la dérivée seconde f''

Propriété 3

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

1. f est **convexe** sur I si et seulement si pour tout réel x appartenant à I, on a $f''(x) \geqslant 0$.
2. f est **concave** sur I si et seulement si pour tout réel x appartenant à I, on a $f''(x) \leqslant 0$.

Capacité 3 ***Esquisser $\mathscr{C}_f$ à partir des tableaux de variations de f, f' ou f'', voir capacité 6 p.207***

1. On considère une fonction f deux fois dérivable sur $[-5;5]$ dont on donne ci-dessous le tableau de variations ainsi que le tableau de variations de sa dérivée f' :

x	-5		-2		2		5
$f(x)$	-1	↗	3	↘	-2	↗	0

x	-5		0		3		5
$f'(x)$	3	↘	-2	↗	2	↘	0

Déterminer la convexité de la fonction f et tracer dans un repère une courbe possible pour f.

2. On considère une fonction g deux fois dérivables sur $[-2;6]$, dont on donne ci-dessous les tableaux de variations de g et g''.

x	-2		0		3		4		6
$g''(x)$	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	2

x	-2		-1		0		2		4		6
$g(x)$	1	↘	-4	↗	3	↗	5	↘	2	↘	0

Déterminer la convexité de la fonction g et tracer dans un repère une courbe possible pour g.

4 Point d'inflexion et dérivée seconde

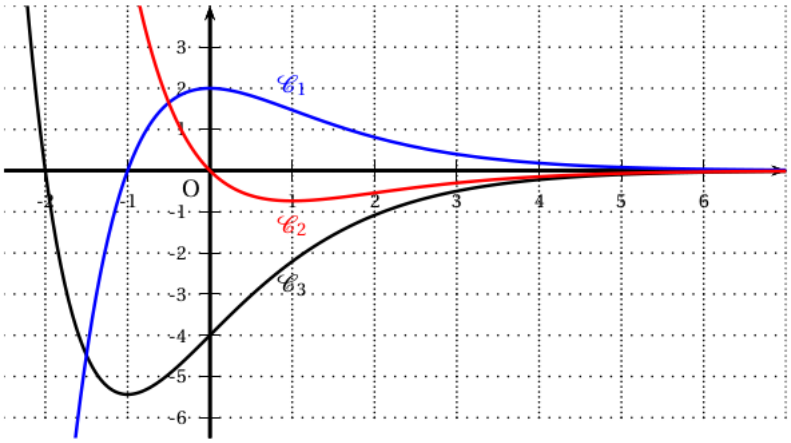
Propriété 4

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I, soit $a \in$ I et soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.
Le point A de coordonnées $(a; f(a))$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ si et seulement si f'' s'annule en a en changeant de signe.

Capacité 4 ***Lier une représentation graphique de f, f' ou f''***

On considère une fonction f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. Dans le repère orthogonal ci-dessous trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ ont été représentées. L'une de ces courbes représente la fonction f, une autre représente sa dérivée et une troisième représente sa dérivée seconde. Expliquer comment ces représentations graphiques permettent de déterminer la convexité de la fonction f.



2. On admet que pour tout réel x, on a $f(x) = (-2x-4)\mathrm{e}^{-x}$.

   a. Déterminer des expressions de $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout réel x.

   b. En déduire l'étude de la convexité de f et des éventuels points d'inflexions de sa courbe. Vérifier les conjectures établies à la question 1.

Capacité 5 ***Démontrer une inégalité de convexité, voir capacité 7 p.208***

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère du plan.

1. Déterminer des expressions de $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout réel x puis étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

3. En déduire que pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x$.