Capacité 1 ***Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle ⇒ exo 1 p.121***

On considère l'équation différentielle (E) définie pour une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$(E)\ :\ y' - 3y = 2$$

1. Vérifier que les fonctions suivantes sont solutions de l'équation E :

a. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{2}{3}$.

b. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 6\mathrm{e}^{3x} - \frac{2}{3}$.

2. **a.** Soit k une constante réelle, démontrer que la fonction h_k définie sur $\mathbb{R}$ par $h_k(x) = k\mathrm{e}^{3x} - \frac{2}{3}$ est solution de l'équation E.

b. Déterminer la constante k pour que la fonction h_k vérifie $h_k(0) = 5$.

Corrigé 1

Capacité 1

1. Vérification que $f(x) = -\frac{2}{3}$ est solution

On calcule la dérivée :

$$f'(x) = 0.$$

Remplaçons dans le membre de gauche de l'équation :

$$f'(x) - 3f(x) = 0 - 3\left(-\frac{2}{3}\right) = 2.$$

On obtient bien le second membre de l'équation. Ainsi, la fonction f est solution.

2. Vérification que $g(x) = 6e^{3x} - \frac{2}{3}$ est solution

On calcule la dérivée :

$$g'(x) = 18e^{3x}.$$

Remplaçons dans $g'(x) - 3g(x)$:

$$g'(x) - 3g(x) = 18e^{3x} - 3\left(6e^{3x} - \frac{2}{3}\right) = 18e^{3x} - 18e^{3x} + 2 = 2.$$

On retrouve bien le second membre : g est donc solution.

3. Recherche de la solution générale

Observons que le terme $6e^{3x}$ peut être remplacé par une constante arbitraire k : si l'on pose

$$h_k(x) = ke^{3x} - \frac{2}{3},$$

alors $h_k'(x) = 3ke^{3x}$, et donc

$$h_k'(x) - 3h_k(x) = 3ke^{3x} - 3\left(ke^{3x} - \frac{2}{3}\right) = 3ke^{3x} - 3ke^{3x} + 2 = 2.$$

Ainsi, pour tout réel k, h_k est solution.
Solution générale :

$$\boxed{y(x) = ke^{3x} - \frac{2}{3}, \quad k \in \mathbb{R}.}$$

4. Détermination de k pour $h_k(0) = 5$

On a

$$h_k(0) = k - \frac{2}{3} = 5 \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{17}{3}.$$

Ainsi, la solution particulière vérifiant $y(0) = 5$ est

$$\boxed{y(x) = \frac{17}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}.}$$

Capacité 2 ***Résoudre une équation différentielle $y' = ay \Rightarrow$ exo 9 p.125***

Soit (E) l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par $y' - 6y = 0$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution f de (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 3$.

Corrigé 2 *Capacité 2*

On réécrit sous la forme $y' = 6y$.

1. Équation homogène

Il s'agit d'une équation de la forme $y' = ay$ avec $a = 6$.
D'après le théorème, les solutions sont de la forme :

$$y(x) = Ce^{6x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. Application de la condition initiale

On impose $f(0) = 3$:

$$Ce^0 = 3 \Longrightarrow C = 3.$$

Ainsi la solution particulière est

$$\boxed{f(x) = 3e^{6x}.}$$

Capacité 3 *Résoudre une équation différentielle $y' = ay + b \Rightarrow$ exo 10 p.125*

Un cycliste roule sur une route descendante rectiligne et très longue. On note $v(t)$ sa vitesse à l'instant t, où t est exprimé en secondes et $v(t)$ en mètres par seconde.
On suppose de plus que la fonction v ainsi définie est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
Un modèle simple permet de considérer que la fonction v est solution de l'équation différentielle :

$$(E)\ :\ 10v'(t) + v(t) = 30$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. On suppose que, lorsque le cycliste s'élance, sa vitesse initiale est nulle, c'est-à-dire que $v(0) = 0$. En déduire l'expression de la fonction v.

Corrigé 3

Capacité 3

On met l'équation sous la forme $v' = av + b$.

$$10v'(t) + v(t) = 30 \iff v'(t) = -\frac{1}{10}v(t) + 3.$$

On reconnaît $a = -\frac{1}{10}$ et $b = 3$.

1. Équation homogène

On résout $v_h' = -\frac{1}{10}v_h$.

$$v_h(t) = Ke^{-t/10}.$$

2. Recherche d'une solution constante

Si v est constante égale à c, alors $v'(t) = 0$. L'équation devient $0 = -\frac{1}{10}c + 3$, soit

$$c = 30.$$

3. Superposition

Toute solution est de la forme

$$v(t) = Ke^{-t/10} + 30.$$

4. Condition initiale

On sait que $v(0) = 0$, donc

$$K + 30 = 0 \Longrightarrow K = -30.$$

On obtient finalement :

$$\boxed{v(t) = 30\left(1 - e^{-t/10}\right).}$$

Thème 1 *Loi de refroidissement de Newton*

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.

Une tasse de café est servie à une température initiale de 80 °C dans un milieu dont la température, exprimée en degré Celsius, supposée constante, est notée M.
Le but de cet exercice est d'étudier le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton suivant deux modèles. L'un, dans la partie A, utilise une suite; l'autre, dans la partie B, utilise une fonction.

Partie A : modèle discret

Dans cette partie, pour tout entier naturel n, on note T_n la température du café à l'instant n, avec T_n exprimé en degré Celsius et n en minute. On a ainsi $T_0 = 80$.
On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques n et $n+1$ par l'égalité :

$$T_{n+1} - T_n = k\,(T_n - M)$$

où k est une constante réelle.
Dans la suite de la partie A, on choisit $M = 10$ et $k = -0,2$.
Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $T_{n+1} - T_n = -0,2\,(T_n - 10)$.

1. D'après le contexte, peut-on conjecturer le sens de variations de la suite (T_n) ?
2. Montrer que pour tout entier naturel n : $T_{n+1} = 0,8T_n + 2$.
3. On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = T_n - 10$.
   - **a.** Montrer que (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0.
   - **b.** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $T_n = 70 \times 0,8^n + 10$.
   - **c.** Déterminer la limite de la suite (T_n).
4. On considère la fonction Python suivante :

```
Tant que T ⩾ 40
      T ← 0,8T + 2
      n ← n + 1
Fin Tant que
```

```python
def seuil(s):
    t = 80
    n = 0
    while ............. :
```

```
        t = .............
        n = .............
    return n
```

a. Quelle valeur numérique est renvoyée par `seuil(40)` ?

b. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Partie B : modèle continu

Dans cette partie, pour tout réel t positif ou nul, on note $\theta(t)$ la température du café à l'instant t, avec $\theta(t)$ exprimé en degré Celsius et t en minute. On a ainsi $\theta(0) = 80$.

Dans ce modèle, plus précis que celui de la partie A, on suppose que θ est une fonction dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et que, pour tout réel t de cet intervalle, la loi de Newton se modélise par l'équation différentielle (E_M) :

$$\theta'(t) = -0,2(\theta(t) - M).$$

1. Dans cette question, on choisit $M = 0$. On cherche alors une fonction θ dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ vérifiant $\theta(0) = 80$ et solution de l'équation différentielle (E_0).

$$\theta'(t) = -0,2\theta(t)$$

Déterminer la fonction θ solution particulière de l'équation différentielle (E_0) vérifiant la condition initiale $\theta(0) = 80$.

2. Dans cette question, on choisit $M = 10$.

a. Déterminer la fonction g solution particulière de l'équation différentielle (E_{10}) vérifiant la condition initiale $g(0) = 80$.

b. Une personne aime boire son café à 40 °C.
Montrer qu'il existe un unique réel t_0 dans $[0\ ;\ +\infty[$ tel que $g(t_0) = 40$.
Donner la valeur de t_0 arrondie à la seconde.

Corrigé 4

Thème 1

A. Modèle discret : $T_{n+1} - T_n = -0{,}2(T_n - 10)$, $T_0 = 80$

1. Sens de variation. Au départ, $T_0 - 10 = 70 > 0$. Alors $T_{n+1} - T_n = -0{,}2(T_n - 10) < 0$ tant que $T_n > 10$: la suite décroît.

2. Mise sous forme affine.

$$T_{n+1} = 0{,}8\,T_n + 2.$$

3. Réduction à une suite géométrique. Posons $u_n = T_n - 10$.
Alors
$$u_{n+1} = T_{n+1} - 10 = (0{,}8T_n + 2) - 10 = 0{,}8(T_n - 10) = 0{,}8u_n.$$
Donc (u_n) est géométrique de raison 0,8 et $u_0 = 70$.
Ainsi
$$u_n = 70 \times 0{,}8^n \quad \text{et} \quad T_n = 70 \times 0{,}8^n + 10.$$
La limite est 10.

4. Interprétation du programme Python. La fonction `seuil(40)` renvoie le nombre d'itérations nécessaires pour avoir $T_n < 40$.
On résout :
$$70 \times 0{,}8^n + 10 < 40 \iff 0{,}8^n < \frac{3}{7}.$$
$$n > \frac{\ln(3/7)}{\ln(0{,}8)} \approx 3{,}8.$$
Le plus petit entier vérifiant cette inégalité est $n = 4$.

$$\boxed{\text{La fonction renvoie 4.}}$$

B. Modèle continu : $\theta'(t) = -0{,}2(\theta(t) - M)$, $t \geq 0$

1. Cas $M = 0$, $\theta(0) = 80$. L'équation devient $\theta'(t) = -0{,}2\theta(t)$.
C'est de la forme $y' = ay$ avec $a = -0{,}2$.
$$\boxed{\theta(t) = 80e^{-0{,}2t}.}$$

2. Cas $M = 10$, $g(0) = 80$. On a $\theta'(t) = -0{,}2(\theta(t) - 10) = -0{,}2\theta(t) + 2$.
Étape 1 : équation homogène $y_h' = -0{,}2y_h$:
$$y_h(t) = ke^{-0{,}2t}.$$
Étape 2 : solution constante c : $0 = -0{,}2c + 2 \Rightarrow c = 10$.
Étape 3 : superposition :
$$g(t) = ke^{-0{,}2t} + 10.$$
Condition initiale : $g(0) = 80 \Rightarrow k = 70$.
$$\boxed{g(t) = 10 + 70e^{-0{,}2t}.}$$

Temps pour atteindre 40 °C.
$$10 + 70e^{-0{,}2t_0} = 40 \iff e^{-0{,}2t_0} = \frac{3}{7}.$$
$$t_0 = \frac{\ln(7/3)}{0{,}2} = 5\ln\left(\frac{7}{3}\right) \approx 4{,}24.$$
$$\boxed{t_0 \approx 4\,\text{min}\,14\,\text{s}.}$$