Histoire 1

Inscrit à 18 ans à l'Université de Cambridge, Isaac Newton doit rentrer se confiner au manoir familial lorsque la peste se déclare quatre ans plus tard. En 1665 et 1666, il profite de son inactivité pour inventer l'essentiel des mathématiques et de la physique moderne au cours de son *année miraculeuse* : la théorie de l'optique, la méthode des fluxions, la théorie des couleurs et les prémices de la théorie de la gravitation universelle! Dans son ouvrage posthume (1740) « La méthode des fluxions » il distingue deux classes de problèmes :

- Problème I : « *étant donnée la relation des quantités fluentes (y et x), trouver la relation de leurs fluxions ($\mathring{x} = dx$ et $\mathring{y} = dy$)* », il s'agit d'un problème de dérivation en langage moderne.
- Problème II : « *Étant donnée la relation des fluxions, trouver celle des quantités fluentes* ». La relation des fluxions, est une relation faisant intervenir des fonctions et leurs dérivées, autrement dit, une équation différentielle en langage moderne. Par exemple il peut s'agir de déterminer la trajectoire d'un objet à partir de sa position initiale et de la loi de sa vitesse.

Source : *Bernard Ycart :* https://hist-math.fr/newtona-auto#.

1 Équation différentielle

Définition 1

- Une **équation différentielle** est une équation définie sur un intervalle I où l'inconnue est une fonction dérivable sur I et où interviennent des dérivées de cette fonction.
- **Résoudre** une équation différentielle consiste à déterminer l'ensemble des fonctions solutions de l'équation.
- Une convention usuelle est de noter y la fonction inconnue d'une équation différentielle et y', y'' etc ... ses dérivées successives.

  De plus dans l'écriture d'une équation différentielle, on omet généralement x pour les fonctions y et y'. Ainsi l'équation définie pour une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ par $y'(x) = 2y(x) + x - 1$ peut s'écrire $y' = 2y + x - 1$.

Capacité 1 ***Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle ⇒ exo 1 p.121***

On considère l'équation différentielle (E) définie pour une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$(E)\ :\ y' - 3y = 2$$

1. Vérifier que les fonctions suivantes sont solutions de l'équation E :

a. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{2}{3}$.

b. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 6\mathrm{e}^{3x} - \dfrac{2}{3}$.

2. **a.** Soit k une constante réelle, démontrer que la fonction h_k définie sur $\mathbb{R}$ par $h_k(x) = ke^{3x} - \dfrac{2}{3}$ est solution de l'équation E.

   b. Déterminer la constante k pour que la fonction h_k vérifie $h_k(0) = 5$.

2 Équations différentielles $y' = ay + b$

2.1 Équations différentielles $y' = ay$

Théorème 1

Soit a un réel non nul.
L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ est l'ensemble des fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$ où C est une constante réelle.

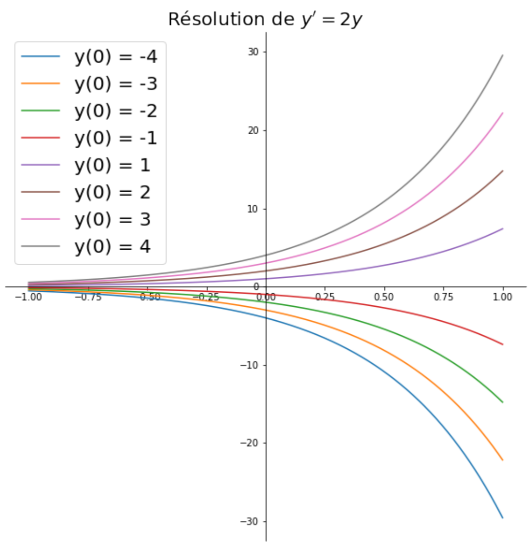
Remarque 1

- Pour un réel a non nul fixé, il existe une infinité de solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$.

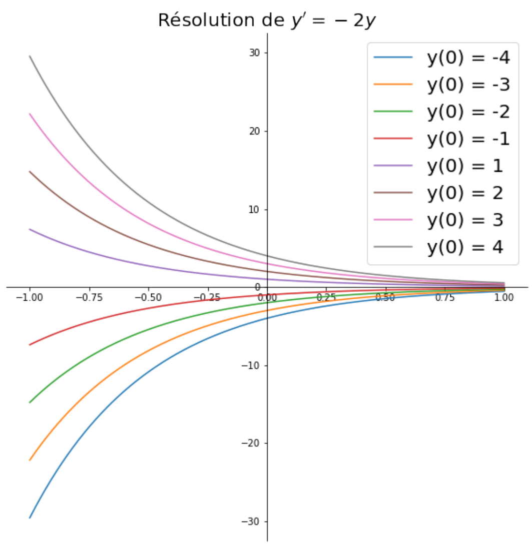
  Les courbes de ces solutions sont appelées *courbes intégrales*.

- Pour un réel a non nul fixé et un couple de valeurs initiales (x_0, y_0) fixé, il existe une unique solution de l'équation différentielle $y' = ay$ telle que $y(x_0) = y_0$.

Courbes intégrales de $y' = ay$ avec $a > 0$



Courbes intégrales de $y' = ay$ avec $a < 0$



Capacité 2 ***Résoudre une équation différentielle*** $y' = ay \Rightarrow$ ***exo 9 p.125***

Soit (E) l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par $y' - 6y = 0$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution f de (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 3$.

2.2 Équations différentielles $y' = ay + b$

Définition 2

Soit a (avec $a \neq 0$) et b deux constantes réelles.
L'équation différentielle définie pour une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ par $y' = ay + b$ est appelée **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants**.

Propriété 1

Soit a (avec $a \neq 0$) et b deux constantes réelles .
Une solution particulière de l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' = ay + b$ est la fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\dfrac{b}{a}$.

Démonstration

- Hypothèses : Soit a (avec $a \neq 0$) et b deux constantes réelles et soit l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par $y' = ay + b$. On considère la fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\dfrac{b}{a}$.
- Raisonnement :

  ....

  ....

- Conclusion :

  La fonction constante g est une solution particulière de l'équation différentielle $y' = ay + b$.

Théorème 2 ***admis***

Soit a (avec $a \neq 0$) et b deux constantes réelles.

1. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par $(E) : y' = ay + b$ s'obtient par **superposition** d'une solution quelconque de l'équation $(E_0) : y' = ay$ et d'une solution particulière de l'équation $y' = ay + b$.
2. Ainsi, d'après la propriété donnant une solution constante et le **principe de superposition**, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E) : y' = ay + b$ est l'ensemble des fonctions défi-

nies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$ avec C une constante réelle.

Capacité 3 ***Résoudre une équation différentielle*** $y' = ay + b \Rightarrow$ ***exo 10 p.125***

Un cycliste roule sur une route descendante rectiligne et très longue. On note $v(t)$ sa vitesse à l'instant t, où t est exprimé en secondes et $v(t)$ en mètres par seconde.
On suppose de plus que la fonction v ainsi définie est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
Un modèle simple permet de considérer que la fonction v est solution de l'équation différentielle :

$$(E)\ :\ 10v'(t) + v(t) = 30$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. On suppose que, lorsque le cycliste s'élance, sa vitesse initiale est nulle, c'est-à-dire que $v(0) = 0$. En déduire l'expression de la fonction v.

3 Thème du programme : modèle d'évolution

Thème 1 ***Loi de refroidissement de Newton***

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.

Une tasse de café est servie à une température initiale de 80 °C dans un milieu dont la température, exprimée en degré Celsius, supposée constante, est notée M.
Le but de cet exercice est d'étudier le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton suivant deux modèles. L'un, dans la partie A, utilise une suite ; l'autre, dans la partie B, utilise une fonction.

Partie A : modèle discret

Dans cette partie, pour tout entier naturel n, on note T_n la température du café à l'instant n, avec T_n exprimé en degré Celsius et n en minute. On a ainsi $T_0 = 80$.
On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques n et $n+1$ par l'égalité :

$$T_{n+1} - T_n = k(T_n - M)$$

où k est une constante réelle.
Dans la suite de la partie A, on choisit $M = 10$ et $k = -0,2$.
Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $T_{n+1} - T_n = -0,2(T_n - 10)$.

1. D'après le contexte, peut-on conjecturer le sens de variations de la suite (T_n) ?
2. Montrer que pour tout entier naturel n : $T_{n+1} = 0,8T_n + 2$.
3. On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = T_n - 10$.
   - **a.** Montrer que (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0.
   - **b.** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $T_n = 70 \times 0,8^n + 10$.
   - **c.** Déterminer la limite de la suite (T_n).
4. On considère la fonction Python suivante :

Tant que $T \geqslant 40$
    $T \leftarrow 0,8T + 2$
    $n \leftarrow n + 1$
Fin Tant que

```
def seuil(s):
    t = 80
    n = 0
    while ............. :
        t = .............
        n = .............
    return n
```

a. Quelle valeur numérique est renvoyée par `seuil(40)` ?

b. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Partie B : modèle continu

Dans cette partie, pour tout réel t positif ou nul, on note $\theta(t)$ la température du café à l'instant t, avec $\theta(t)$ exprimé en degré Celsius et t en minute. On a ainsi $\theta(0) = 80$.

Dans ce modèle, plus précis que celui de la partie A, on suppose que θ est une fonction dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et que, pour tout réel t de cet intervalle, la loi de Newton se modélise par l'équation différentielle (E_M) :

$$\theta'(t) = -0,2(\theta(t) - M).$$

1. Dans cette question, on choisit $M = 0$. On cherche alors une fonction θ dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ vérifiant $\theta(0) = 80$ et solution de l'équation différentielle (E_0).

$$\theta'(t) = -0,2\theta(t)$$

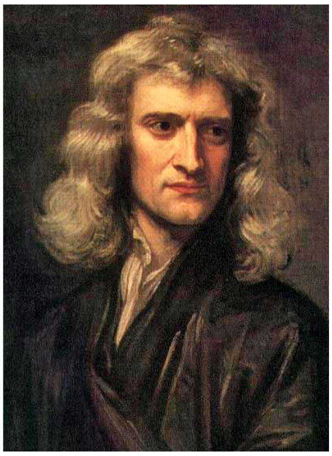
Déterminer la fonction θ solution particulière de l'équation différentielle (E_0) vérifiant la condition initiale $\theta(0) = 80$.

2. Dans cette question, on choisit $M = 10$.

a. Déterminer la fonction g solution particulière de l'équation différentielle (E_{10}) vérifiant la condition initiale $g(0) = 80$.

b. Une personne aime boire son café à 40 °C.
Montrer qu'il existe un unique réel t_0 dans $[0\,;\,+\infty[$ tel que $g(t_0) = 40$.
Donner la valeur de t_0 arrondie à la seconde.
Pour déterminer x tel que $e^x = b$ (avec $b > 0$), on utilisera la fonction logarithme népérien (touche ln *de la calculatrice) :*

$$e^x = b \Longleftrightarrow x = \ln(b)$$



Isaac Newton (1642 -1727)

Au commencement de l'année 1665, je trouvai la méthode des séries approximantes, et la règle pour réduire n'importe quelle puissance d'un binôme en une telle série. La même année en mai, je trouvai la méthode des tangentes de Gregory et Slusius, et en novembre j'eus la méthode directe des fluxions,et l'année suivante en janvier j'eus la théorie des couleurs, et en mai suivant j'eus accès à la méthode inverse des fluxions. Et la même année je commençai à penser à la gravité étendue à l'orbite de la lune.

Table des matières