

## Histoire 1

Il y a 2500 ans environ, **Zénon d'Élée** énonçait le **paradoxe d'Achille et la tortue** : « *Achille voit une tortue devant lui. Il court pour la rattraper mais il ne pourra y arriver car lorsque Achille atteint la place qu'occupait la tortue, cette dernière a avancé; il doit donc atteindre maintenant la place qu'elle occupe alors, et ainsi de suite ...* ». Ce paradoxe peut être résolu avec la définition rigoureuse de limite d'une fonction fixée par **Weierstrass (1815-1897)** et la construction des nombres réels par **Dedekind (1831-1916)** qui fonde un continu mathématique correspondant au continu de notre intuition physique.

## 1 Limite en l'infini d'une fonction

### 1.1 Limite réelle en l'infini, asymptote horizontale

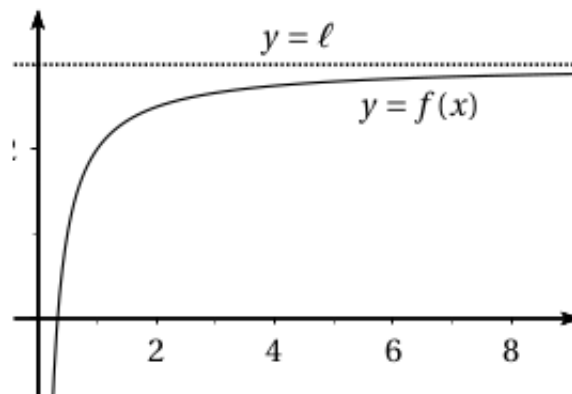
#### Définition 1

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $[a; +\infty[$  et soit  $\ell$  un réel.

- Si  $f(x)$  prend des valeurs aussi proches de  $\ell$  que l'on veut pour  $x$  assez grand, alors on dit que  $f(x)$  admet pour limite  $\ell$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  et on note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} f(x) = \ell$$

- On dit alors que la droite d'équation  $y = \ell$  est **asymptote horizontale** à  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$ .



La droite d'équation  $y = \ell$  est asymptote à courbe  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$

#### Définition 2

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $]-\infty; a]$  et soit  $\ell$  un réel.

- Si  $f(x)$  prend des valeurs aussi proches de  $\ell$  que l'on veut pour  $x$  négatif et assez petit, alors on dit

que  $f(x)$  admet pour limite  $\ell$  lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$  et on note :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{-\infty} f(x) = \ell$$

- On dit alors que la droite d'équation  $y = \ell$  est **asymptote horizontale** à  $\mathcal{C}_f$  en  $-\infty$ .

## Capacité 1 Relier asymptotes horizontales et limites, exo 7p.63

Soit  $f$  une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\lim_{-\infty} f(x) = 4$  et  $\lim_{+\infty} f(x) = -2$ .

- Représenter une courbe possible pour  $f$  en traçant ses droites asymptotes en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
- $f$  est-elle nécessairement une fonction décroissante sur  $\mathbb{R}$ ?

## 1.2 Limite infinie en l'infini

### Définition 3

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $[\alpha; +\infty[$ .

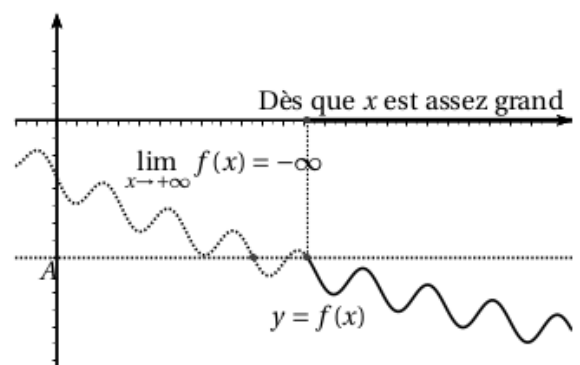
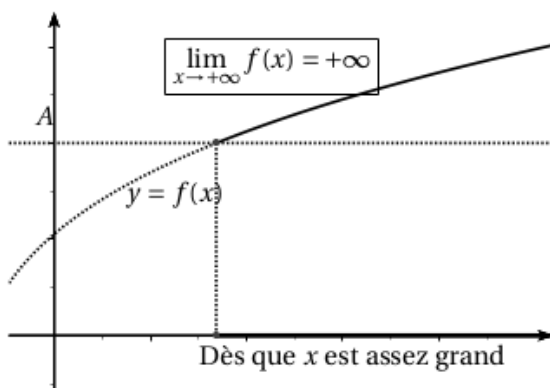
- Si  $f(x)$  prend des valeurs aussi grandes que l'on veut pour  $x$  assez grand alors on dit que  $f(x)$  admet pour limite  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  et on note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} f(x) = +\infty$$

- Si  $f(x)$  prend des valeurs négatives aussi petites que l'on veut pour  $x$  assez grand alors on dit que  $f(x)$  admet pour limite  $-\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  et on note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} f(x) = -\infty$$

On a des définitions similaires pour  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$



## 1.3 Limites de référence en l'infini



## Propriété 1

1.  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$
2.  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \\ +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
4. Soit  $p \in \mathbb{R}$  alors,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} p = p$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} p = p$
5. Si  $m > 0$  alors  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} mx + p = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} mx + p = -\infty \end{cases}$
6. Si  $m < 0$  alors  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} mx + p = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} mx + p = +\infty \end{cases}$
7.  $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \end{cases}$
8.  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{cases}$



## Propriété 2 Limites de la fonction exponentielle

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \dots$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \dots$

La droite d'équation ..... est asymptote à la courbe de la fonction exponentielle au voisinage de  $-\infty$ .



## Capacité 2 Déterminer des limites de référence en l'infini

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -4x + 5$
2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -4x + 5$
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3$
4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$
5.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$
6.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3$
7.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4$
8.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4$
9.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$
10.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$
11.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}$
12.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|$

## 2 Limite d'une fonction en un réel $a$

Dans toute cette section, on considère une fonction  $f$  définie sur un ensemble  $\mathcal{D}_f$  et un réel  $a$  tel que soit  $a \in \mathcal{D}_f$ , soit  $a$  est une borne de  $\mathcal{D}_f$ .

### 2.1 Limite infinie en $a$ , asymptote verticale



## Définition 4

- Une fonction  $f$  a pour limite  $+\infty$  en  $a$  si  $f(x)$  peut être aussi grand que l'on veut, pour  $x$  assez proche de  $a$ .

On note  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ .

- Si on considère la restriction de  $f$  à  $\mathcal{D}_f \cap ]a; +\infty[$ , on dit que  $f$  a pour limite  $+\infty$  à droite de  $a$  (ou en  $a^+$ ) si  $f(x)$  peut être aussi grand que l'on veut pour  $x$  assez proche de  $a$  et vérifiant  $x > a$ .

On note  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = +\infty$ .

- On définit de même que  $f$  a pour limite  $+\infty$  à gauche de  $a$  (ou en  $a^-$ ) et on note  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = +\infty$ .

- Si  $f$  a pour limite  $+\infty$  en  $a$ , en  $a^+$  ou en  $a^-$ , alors la droite d'équation  $x = a$  est asymptote verticale à  $\mathcal{C}_f$ .

- Une fonction  $f$  a pour limite  $-\infty$  en  $a$  si  $f(x)$  est négatif et aussi petit que l'on veut, pour  $x$  assez proche de  $a$ .

On note  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ .

- Si on considère la restriction de  $f$  à  $\mathcal{D}_f \cap ]-\infty; a[$ , on dit que  $f$  a pour limite  $-\infty$  à droite de  $a$  (ou en  $a^-$ ) si  $f(x)$  peut être aussi grand que l'on veut pour  $x$  assez proche de  $a$  et vérifiant  $x < a$ .

On note  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = -\infty$ .

- On définit de même que  $f$  a pour limite  $-\infty$  à gauche de  $a$  (ou en  $a^-$ ) et on note  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = -\infty$ .

## Capacité 3 Interpréter graphiquement une limite, exo 11 p. 65

Déterminer pour chaque limite si elle se traduit pour la courbe de la fonction  $f_i$  par : une asymptote horizontale, une asymptote verticale ou pas d'asymptote. S'il y a une asymptote, préciser son équation.

1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = -3$

3.  $\lim_{x \rightarrow 2} f_3(x) = -\infty$

5.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f_5(x) = -\infty$

7.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_7(x) = +\infty$

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = +\infty$

4.  $\lim_{x \rightarrow 2} f_4(x) = 5$

6.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_6(x) = 8$

8.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_8(x) = +\infty$

## 2.2 Limite finie en $a$ et limites de référence



## Définition 5

Une fonction  $f$  a pour limite  $\ell$  en  $a$  si  $f(x)$  est aussi proche que l'on veut de  $\ell$  pour  $x$  assez proche de  $a$ .

On note :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ .

En particulier, si  $a \in \mathcal{D}_f$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  alors  $\ell = f(a)$ .

Comme pour les limites infinies, on peut avoir besoin de définir les notions de limite finie à droite en  $a$

notée  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \ell$  ou de limite finie à gauche en  $a$  notée  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \ell$ .

## Propriété 3 admise

1. Soit  $a$  un réel :

- Si  $a \geq 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$
- Si  $f$  est un polynôme ou un quotient de polynômes défini en  $a$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .
- $\lim_{x \rightarrow a} e^x = e^a$

3.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \\ +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

2.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

4.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

## Capacité 4 Interpréter un tableau de variations, exo 8 p.63, exo 11 p.65

On considère une fonction  $f$  dont on donne ci-dessous le tableau de variation.  
On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe dans un repère orthonormal du plan.

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$f(x)$	731	$+\infty$	$-\infty$	732

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Quelles sont les valeurs de  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x)$  et de  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x)$ ?
3. Quelles sont les limites de  $f$  en  $1^-$  et  $1^+$ ?
4. Déterminer les éventuelles droites asymptotes horizontales et verticales à  $\mathcal{C}_f$ .
5. Dans un repère orthonormal du plan, tracer les droites asymptotes à  $\mathcal{C}_f$  puis une représentation possible de  $\mathcal{C}_f$ .

## 3 Règles opératoires sur les limites

Dans toute cette section les fonctions  $u$  et  $v$  sont deux fonctions admettant une limite finie ou infinie, lorsque  $x$  tend vers  $a$  qui peut être un réel ou  $+\infty$  ou  $-\infty$ .  
L'abréviation FI signifie forme indéterminée, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de théorème général permettant de conclure.

## 3.1 Limite d'une somme

$\lim_{x \rightarrow a} u(x) =$	$L$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} v(x) =$	$L'$	$L'$	$L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} u(x) + v(x) =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

## 3.2 Limite d'un produit

$\lim_{x \rightarrow a} u(x) =$	$\ell$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$0$
$\lim_{x \rightarrow a} v(x) =$	$\ell'$	$\ell' > 0$ ou $\ell' < 0$	$\ell' > 0$ ou $\ell' < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} u(x) \times v(x) =$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$ ou $-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

## 3.3 Limite d'un quotient

$\lim_{x \rightarrow a} u(x) =$	$\ell$	$\ell$	$+\infty$	$-\infty$	$\ell > 0$ ou $\ell < 0$	$\ell > 0$ ou $\ell < 0$
$\lim_{x \rightarrow a} v(x) =$	$\ell' \neq 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	$\ell' > 0$ ou $\ell' < 0$	$\ell' > 0$ ou $\ell' < 0$	$0^+$	$0^-$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} =$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow a} u(x) =$	$-\infty$	$+\infty$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	$0$
$\lim_{x \rightarrow a} v(x) =$	$0^+$ ou $0^-$	$0^+$ ou $0^-$	$-\infty$ ou $+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$0$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} =$	$-\infty$ ou $+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$0^-$ ou $0^+$	$0^-$ ou $0^+$	FI	FI

### Capacité 5 Déterminer une limite par règles opératoires

1. Faire les exercices 16 et 17 page 67 du manuel Hyperbole.
2. Toutes les limites suivantes sont bien définies, déterminer leur valeur par règle opératoire :

a.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^x)x^3$

b.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^x)x^3$

c.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - e^x$

d.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \frac{1}{x}$

e.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} 1 - \frac{1}{x}$

f.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x + \sqrt{x}}$

g.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x}$

h.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{x-1}$

i.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{x-1}$

j.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 + e^x}{e^x - 3}$

### 3.4 Formes indéterminées pour les fonctions polynômes ou quotient de polynômes

Il existe quatre formes indéterminées : «  $\infty - \infty$  », «  $\infty \times 0$  », «  $\frac{\infty}{\infty}$  », «  $\frac{0}{0}$  ». En pratique, pour lever l'indétermination, on change de forme en factorisant par exemple par les termes prépondérants (en l'infini pour tous entiers  $n > p$ ,  $x^n$  l'emporte sur  $x^p$ , et  $x^n$  l'emporte sur  $\sqrt{x}$ ).

#### Méthode

- Pour lever une forme indéterminée de la forme  $+\infty + (-\infty)$ , on peut essayer de changer de forme en factorisant l'expression par le terme prépondérant. Pour une fonction polynôme, le terme dominant en  $+\infty$  ou  $-\infty$  est le terme de plus haut degré.
- Pour lever une forme indéterminée de la forme  $\frac{\infty}{\infty}$  ou  $\frac{0}{0}$ , on peut factoriser le numérateur et le dénominateur par leur terme prépondérant puis simplifier le quotient des termes dominant.

#### Capacité 6 Lever une forme indéterminée en factorisant par le terme dominant

1. On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ .

a. Déterminer les limites de  $x^3$  et  $-x^2 + 1$  en  $+\infty$ .

Peut-on en déduire par somme la limite de fonction  $f$  en  $+\infty$ ?

b. Démontrer que pour tout entier  $x > 0$ , on a :

$$f(x) = x^3 \left( 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right)$$

c. Déterminer les limites de  $x^3$  et  $1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}$  en  $+\infty$ .

Peut-on en déduire par produit la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ ?

2. Pour lever la forme indéterminée par somme dans l'exemple précédent, on a factorisé l'expression par  $x^3$  qui est le terme dominant en  $+\infty$  (celui qui tend le plus vite vers  $+\infty$ ). En procédant de la même façon, déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ . Était-il vraiment nécessaire de changer de forme dans ce cas?

3. On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ .

a. Déterminer les limites de  $e^x + 1$  et  $e^x - 1$  en  $+\infty$ .

Peut-on en déduire par quotient la limite de la fonction  $g$  en  $+\infty$ ?

b. Démontrer que pour tout réel  $x$ , on a  $g(x) = \frac{e^x(1 - \frac{1}{e^x})}{e^x(1 + \frac{1}{e^x})} = \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}}$ .

c. Déterminer les limites de  $1 - \frac{1}{e^x}$  et  $1 + \frac{1}{e^x}$  en  $+\infty$ .

Peut-on en déduire par quotient la limite de la fonction  $g$  ?

4. Pour lever la forme indéterminée par somme dans l'exemple précédent, on a factorisé le numérateur et le dénominateur par leur terme dominant en  $+\infty$ . En procédant de la même façon, déterminer la limite de la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ .

## 4 Limite par composition

### Propriété 4

Soit  $u$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et à valeurs dans un intervalle  $J$ .

Soit  $v$  une fonction définie sur l'intervalle  $J$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

On considère la fonction  $g$  qui est la composée de  $u$  suivie de  $v$  :

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ x \xrightarrow{u} u(x) \xrightarrow{v} v(u(x)) \end{array}$$

Soit  $a$  un réel dans  $I$  ou qui est une borne de l'intervalle  $I$ .

☞ si  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$  avec  $b$  dans  $J$  ou borne de  $J$

☞ et si  $\lim_{y \rightarrow b} v(y) = c$

alors quand  $x$  tend vers  $a$ , la composée de  $u$  suivie de  $v$  a pour limite  $c$  et on note :

$$\lim_{x \rightarrow a} v(u(x)) = c$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ [x \rightarrow a] \xrightarrow{u} [u(x) \rightarrow b] \xrightarrow{v} [v(u(x)) \rightarrow c] \end{array}$$

### Capacité 7 Appliquer le théorème de limite par composition dans un cas simple

1.
  - a. Déterminer la limite de  $-3x + 1$  en  $-\infty$ .  
En déduire la limite de  $e^{-3x+1}$  en  $-\infty$  à l'aide du théorème de limite par composition.
  - b. Déterminer la limite de  $-3x + 1$  en  $+\infty$ .  
En déduire la limite de  $e^{-3x+1}$  en  $+\infty$  à l'aide du théorème de limite par composition.
2.
  - a. Déterminer la limite de  $e^{-x} + e^{-2x}$  en  $+\infty$  à l'aide du théorème de limite par composition.
  - b. En déduire la limite de  $\frac{1}{e^{-x} + e^{-2x}}$  en  $+\infty$  à l'aide du théorème de limite par composition.

## 5 Thèmes du programme

### Thème 1 *Modèle d'évolution et modèles définis par une fonction d'une variable*

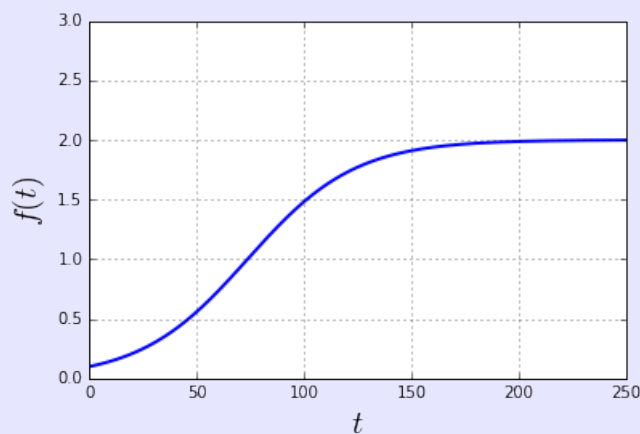
La croissance d'un plant de maïs est modélisée par la fonction  $f$  définie par :

$$f : [0; +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longmapsto \frac{2}{1 + 19e^{-0,04t}}$$

$f(t)$  désigne la hauteur du plant en mètres,  $t$  est la variable temps exprimée en jours avec  $t \in [0; +\infty[$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  comme quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle dont le dénominateur ne s'annule pas sur l'intervalle.

Sur le graphique ci-après, on a représenté la courbe  $\mathcal{C}_f$  de  $f$ .



1. Justifier que pour tout réel  $t \geq 0$ , on a  $f(t) < 2$ .
2. Soit  $t$  un réel appartenant à l'intervalle  $[0; +\infty[$ , déterminer  $f'(t)$ .  
En déduire le sens de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
3. Justifier que la droite d'équation  $y = 2$  est asymptote à la courbe  $\mathcal{C}_f$  et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice. Dresser le tableau de variation complet (avec limites aux bornes) de la fonction  $f$ .
4. Compléter la fonction Python ci-dessous pour que `seuil(epsilon)` renvoie le plus petite entier  $n$  tel que  $2 - \text{epsilon} < f(n) < 2$  avec  $\text{epsilon}$  un réel strictement positif (et supérieur à  $10^{-15}$ !).

```
from math import exp #import de la fonction exponentielle
def f(t):
    return 2 / (1 + 19 * exp(-0.04*t))

def seuil(epsilon):
    n = 0
    while ..... :
        .....
    return n
```

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Limite en l'infini d'une fonction</b>	<b>1</b>
1.1	Limite réelle en l'infini, asymptote horizontale . . . . .	1
1.2	Limite infinie en l'infini . . . . .	2
1.3	Limites de référence en l'infini . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Limite d'une fonction en un réel <math>a</math></b>	<b>3</b>
2.1	Limite infinie en $a$ , asymptote verticale . . . . .	3
2.2	Limite finie en $a$ et limites de référence . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Règles opératoires sur les limites</b>	<b>5</b>
3.1	Limite d'une somme . . . . .	6
3.2	Limite d'un produit . . . . .	6
3.3	Limite d'un quotient . . . . .	6
3.4	Formes indéterminées pour les fonctions polynômes ou quotient de polynômes . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Limite par composition</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Thèmes du programme</b>	<b>9</b>