Histoire 1

Dans les premières années du XVII$^{\text{ième}}$ siècle, John Neper (1550-1617) invente le logarithme (du grec *logos* logique et *arithmos* nombre) en faisant correspondre les termes d'une suite géométrique à ceux d'une suite arithmétique : les multiplications sont ainsi transformées en addition. Il construit avec Henry Briggs (1561-1630) des tables de logarithme qui facilitent les multiplications de grands nombres, utiles en astronomie. Pour multiplier deux nombres A et B, on additionne leurs logarithmes log(A) et log(B) et on lit dans une table *l'antélogarithme* (en fait l'exponentielle) de cette somme : il s'agit du produit A×B. Cette méthode est utilisée dans les les règles à calculs des lycéens jusque dans les années 1970 avant la démocratisation des calculatrices électroniques.

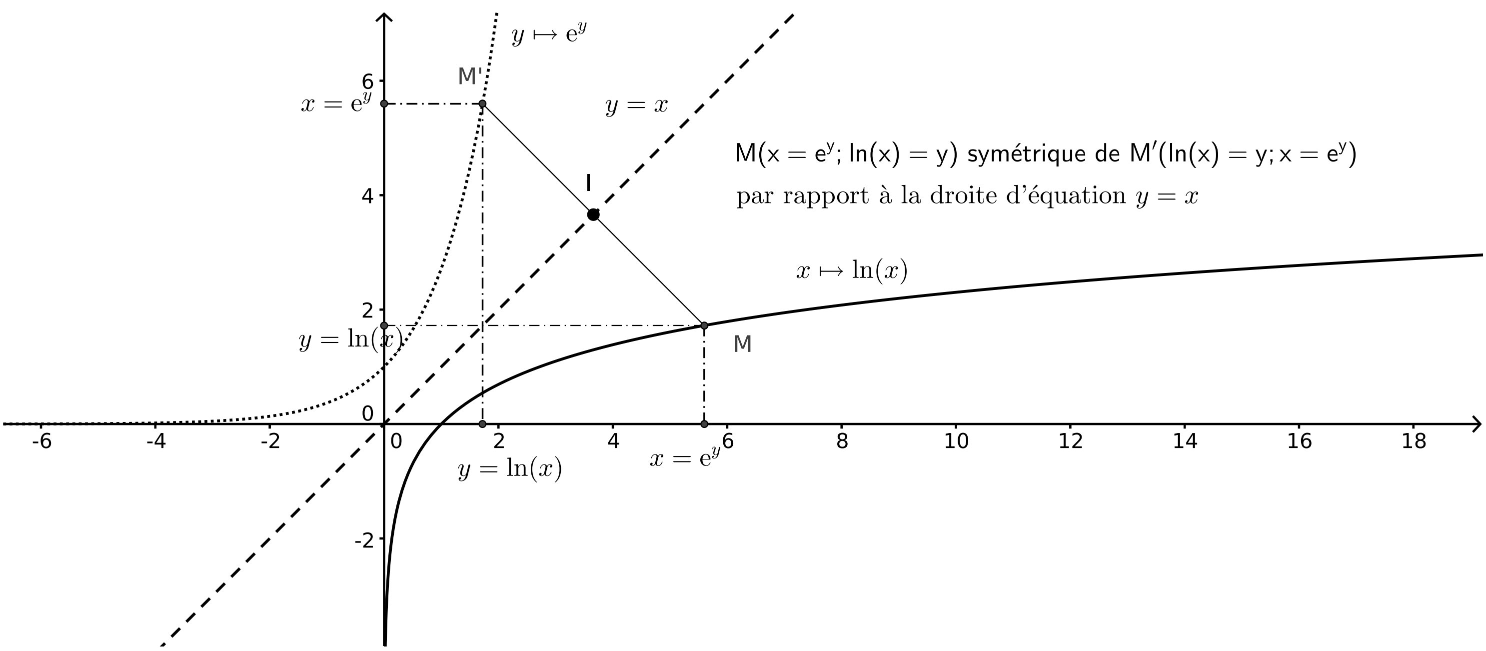
1 Définition

Théorème-Définition 1

Pour tout réel $x > 0$ il existe un unique réel y tel que $\mathrm{e}^y = x$, ce réel est le logarithme népérien de x noté $y = \ln x$.
On définit ainsi sur $]0\,;+\infty[$ la fonction logarithme népérien $\ln : x \mapsto \ln x$, c'est la **fonction réciproque** de la fonction exponentielle .

$$\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad \ln x = y \iff x = \mathrm{e}^y$$

ne pas confondre les touches $\boxed{\text{Ln}}$ et $\boxed{\text{Log}}$ (qui correspond au *logarithme décimal*, pour tout $x > 0$, $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$).



Corollaire ln ***fonction réciproque de*** exp

1. Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$.
2. Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$.
3. En particulier, on a $\ln(e) = 1$ et $\ln(1) = 0$.
4. Dans un repère orthonormé, les courbes des fonctions exp et ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Capacité 1 ***Utiliser la fonction logarithme népérien pour simplifier une exponentielle et réciproquement***

1. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x un réel.

   a. $e^{x^2} = e^2$ **c.** $e^{2-x} = 0$ **e.** $e^{2-x} = -3$
   b. $e^{2-x} = 1$ **d.** $e^{2-x} = 3$ **f.** $e^{2-x} = e^{x^2}$

2. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x un réel strictement positif.

   a. $\ln(x) = 0$ **c.** $\ln(x) = 2$
   b. $\ln(x) = 1$ **d.** $\ln(x) = -2$

2 Dérivée et sens de variation

Propriété 1 ***admise***

1. La fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on a :

$$\boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$$

2. La fonction ln est **strictement croissante** sur $]0\,;+\infty[$.

3 Limites et tableau de variations

Propriété 2 ***admise***

Limites aux bornes de l'intervalle de définition :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty}$$

Propriété 3 *Tableau de variation complet*

1. Des propriétés sur le sens de variation et les limites de la fonction ln, on peut déduire son tableau de variations complet :

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. La droite d'équation $x = 0$ est donc asymptote à la courbe de la fonction ln.

3. Du tableau de variations on déduit le tableau de signes de la fonction ln :

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Capacité 2 *Utiliser la fonction logarithme népérien pour simplifier une exponentielle et réciproquement*

Soit la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x\ln(x)$.
g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Soit x un réel strictement positif, déterminer une expression de $g'(x)$.

2. Étudier le signe de la fonction g' et en déduire les variations de la fonction g.

4 Propriétés algébriques

Propriété 4 *Équation fonctionnelle*

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\boxed{\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)}$$

On dit que la fonction ln vérifie **l'équation fonctionnelle** $f(ab) = f(a) + f(b)$.

Corollaire *admis*

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, pour tout entier relatif n :

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \qquad \text{et} \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln\left(a^n\right) = n\ln(a) \qquad \text{et} \qquad \ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$$

Capacité 3 ***Utiliser les propriétés algébriques de la fonction logarithme pour simplifier une expression, voir exo résolu 11 p.93***

Exprimer en fonction de $\ln(3)$, $\ln(5)$ ou d'un entier :

1. $\ln(15)$
2. $\ln(75)$
3. $\ln(0,6)$
4. $\ln\left(e^{\ln(5/3)}e^{\ln(3)}\right)$
5. $\ln(\sqrt{15})$
6. $\ln(3^4)\ln(5e)$

5 Fonctions composées $x \mapsto \ln(u(x))$ et logarithme décimal

Propriété 5 ***admise***

Soit $\boldsymbol{u}$ une fonction définie sur un intervalle I qui est dérivable et strictement positive sur I.
La fonction composée définie sur I par $\boldsymbol{g(x) = \ln(u(x))}$ est dérivable sur I et on a :

$$\text{pour tout } \boldsymbol{x} \in \mathrm{I} \text{ on a } \boldsymbol{g'(x)} = \frac{\boldsymbol{u'(x)}}{\boldsymbol{u(x)}}$$

On en déduit que les fonctions $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{g = \ln(u)}$ suivent les mêmes variations sur l'intervalle I.

Capacité 4 ***Datation au carbone 14***

Le carbone 14 est un isotope radioactif du carbone employé en archéologie pour dater la matière organique retrouvée lors de fouilles.
La formule suivante donne l'âge T, en années, d'un échantillon extrait lors de fouilles archéologiques, en fonction du pourcentage p % de carbone 14 qu'il contient :

$$T = 8264\ln\left(\frac{100}{P}\right)$$

1. Dans quel intervalle I varie p ?
2. Démontrer que la fonction T est décroissante sur l'intervalle I.
3. On a détecté 5 % de carbone 14 dans une squelette ancien qui semble très ancien.
   Estimer l'âge du squelette. Arrondir à la centaine d'années.
4. La datation au carbone 14 a permis d'estimer l'âge d'une momie à 2500 ans.
   Quel pourcentage de carbone 14 contient-elle encore ? Arrondir à l'unité.

Capacité 5 ***Équation d'un gaz parfait et dérivée logarithmique***

L'équation d'état d'un gaz parfait relie différentes grandeurs macroscopiques qui permettent de le décrire :

- sa pression P en *pascals*
- son volume V en m^3
- la quantité de matière n (en moles)
- la température T en *kelvins*

$$\boxed{PV = nrT} \text{ où } r \text{ est une constante}$$

Fixons la quantité de matière n, les grandeurs $P(t)$, $V(t)$ et $T(t)$ sont des fonctions dérivables par rapport au temps t.

1. Soit t un temps fixé, établir une relation entre $\ln(P(t))$, $\ln(V(t))$ et $\ln(T(t))$.

2. Toujours pour un temps t fixé, en déduire une relation entre $P(t)$, $P'(t)$, $V(t)$, $V'(t)$, $T(t)$ et $T'(t)$.

5.1 Logarithme décimal

Définition 1

La fonction logarithme décimal de x est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.
En particulier on a $\log(1) = 0$ et $\log(10) = 1$.

Propriété 6

1. La fonction logarithme décimal est dérivable et strictement croissante sur $]\mathbf{0}\,;+\infty[$.

Pour tout réel $\boldsymbol{x > 0}$, on a $\boldsymbol{\log'(x) = \dfrac{1}{x\ln(10)}}$.

2. Pour tous réels $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ strictement positifs et tout entier relatif $\boldsymbol{n}$:

- $\boldsymbol{\log(ab) = \log(a) + \log(b)}$
- $\boldsymbol{\log\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\log(a)}$
- $\boldsymbol{\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)}$
- $\boldsymbol{\log\left(a^n\right) = n\log(a)}$
- $\boldsymbol{\log\left(10^n\right) = n}$
- $\boldsymbol{\log\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\log(a)}$

3. Pour tout réel $\boldsymbol{y}$ et tout réel $\boldsymbol{x > 0}$ on a $\boldsymbol{10^x = y \iff x = \log(y)}$

Capacité 6 ***utiliser la fonction logarithme décimal***

1. Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = -\log(x)$.

a. Déterminer l'image de $x = 10^{-3}$ par la fonction f.

b. Déterminer l'antécédent de 4 par la fonction f.

2. En chimie, le caractère acido-basique d'une solution se mesure avec un indicateur noté **pH** :

$$\text{pH} = -\log[H_3O^+]$$

$[H_3O^+]$ est la concentration des ions hydronium exprimée en mol.L^{-1}.

a. Pour un acide on a : $1 < \text{pH} < 7$. En déduire la concentration en ions H_3O^+ d'un acide.

b. Pour une base on a : $7 < \text{pH} < 14$. En déduire la concentration en ions H_3O^+ d'une base.

c. Pour la sang, on a : $[H_3O^+] = 3,98 \times 10^{-8}$ mol.L^{-1}. Montrer que le sang est légèrement basique.

6 Thème du programme : approche historique de la fonction logarithme

Thème 1 ***Calcul de logarithme avec l'algorithme de Briggs, voir exo 105 p.103***

1. **a.** Déterminer le nombre dérivé en 1 de la fonction ln.

b. En déduire que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$. Pour un réel x proche de 1, on peut donc écrire $\ln(x) \approx x - 1$.
Dans cet exercice, on choisit d'utiliser cette approximation pour x vérifiant $\left|x-1\right| < 0,001$.

2. On admet qu'on peut définir une suite (u_n) par $u_0 = 2$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$. De plus on admet que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $u_n > 0$.

a. Démontrer les égalités $\ln(u_1) = \dfrac{1}{2}\ln(2)$ et $\ln(u_2) = \dfrac{1}{2^2}\ln(2)$.

b. Exprimer $\ln(u_{n+1})$ en fonction de $\ln(u_n)$, pour tout entier $n \geqslant 0$.

c. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $v_n = \ln(u_n)$.
Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

d. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $\ln(u_n) = \dfrac{1}{2^n}\ln(2)$.

e. Donner une forme explicite de u_n pour tout entier $n \geqslant 0$.
En déduire que (u_n) converge vers 1.

f. Déduire de la question **1. b** que pour tout entier naturel n tel que $\left|u_n - 1\right| < 0,001$, on a :

$$\ln(2) \approx 2^n(u_n - 1)$$

3. Compléter la fonction `briggs()` ci-dessous pour qu'elle renvoie une valeur approchée de ln(2).

```python
from math import sqrt

def briggs():
    u = 2
    n = 0
    while abs(u - 1) ..... 0.001:
        u = ......
        n = n + 1
    return .......
```

La version présentée dans cet exercice est une version simplifiée de l'algorithme historique. Ci-dessous un extrait de *l'Introduction à l'analyse infinitésimale* où Leonhard Euler 1707-1783 explique la méthode utilisée par Briggs pour calculer une valeur approchée du logarithme décimal de 5. Le **logarithme décimal** d'un nombre strictement positif x noté $\log(x)$ est proportionnel au logarithme népérien $\ln(x)$ par la relation $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Soit la baſe logarithmique $a = 10$, qui eſt celle des tables ordinaires, & propoſons-nous de trouver le logarithme approché de 5. Comme ce nombre eſt renfermé entre les limites 1 & 10, dont les logarithmes ſont 0 & 1, on procédera de la maniere ſuivante à l'extraction des racines, & on continuera les opérations juſqu'à ce qu'on ſoit arrivé à des limites, qui ne different plus du nombre propoſé 5.

$A = 1{,}000000$;	$lA = 0{,}0000000$	ſoit
$B = 10{,}000000$;	$lB = 1{,}0000000$;	$C = \sqrt{AB}$
$C = 3{,}162277$;	$lC = 0{,}5000000$;	$D = \sqrt{BC}$
$D = 5{,}623413$;	$lD = 0{,}7500000$;	$E = \sqrt{CD}$
$E = 4{,}216964$;	$lE = 0{,}6250000$;	$F = \sqrt{DE}$
$F = 4{,}869674$;	$lF = 0{,}6875000$;	$G = \sqrt{DF}$
$G = 5{,}232991$;	$lG = 0{,}7187500$;	$H = \sqrt{FG}$
$H = 5{,}048065$;	$lH = 0{,}7031250$;	$I = \sqrt{FH}$
$I = 4{,}958069$;	$lI = 0{,}6953125$;	$K = \sqrt{HI}$
$K = 5{,}002865$;	$lK = 0{,}6992187$;	$L = \sqrt{IK}$
$L = 4{,}980416$;	$lL = 0{,}6972656$;	$M = \sqrt{KL}$
$M = 4{,}991627$;	$lM = 0{,}6982421$;	$N = \sqrt{KM}$
$N = 4{,}997242$;	$lN = 0{,}6987304$;	$O = \sqrt{KN}$
$O = 5{,}000052$;	$lO = 0{,}6989745$;	$P = \sqrt{NO}$
$P = 4{,}998647$;	$lP = 0{,}6988525$;	$Q = \sqrt{OP}$
$Q = 4{,}999350$;	$lQ = 0{,}6989135$;	$R = \sqrt{OQ}$
$R = 4{,}999701$;	$lR = 0{,}6989440$;	$S = \sqrt{OR}$
$S = 4{,}999876$;	$lS = 0{,}6989592$;	$T = \sqrt{OS}$
$T = 4{,}999963$;	$lT = 0{,}6989668$;	$V = \sqrt{OT}$
$V = 5{,}000008$;	$lV = 0{,}6989707$;	$W = \sqrt{TV}$
$W = 4{,}999984$;	$lW = 0{,}6989687$;	$X = \sqrt{WV}$
$X = 4{,}999997$;	$lX = 0{,}6989697$;	$Y = \sqrt{VX}$
$Y = 5{,}000003$;	$lY = 0{,}6989702$;	$Z = \sqrt{XY}$
$Z = 5{,}000000$;	$lZ = 0{,}6989700$;	

Ainſi, en prenant des moyennes proportionnelles, on eſt parvenu à trouver $Z = 5{,}000000$, à quoi répond le logarithme cherché 0,698970, en ſuppoſant la baſe logarithmique $= 10$. Par conſéquent $10^{\frac{69897}{100000}} = 5$ à-peu-près. C'eſt de cette maniere que Briggs & Ulacq ont calculé la table ordinaire des logarithmes, quoiqu'on ait imaginé depuis des méthodes plus expéditives pour les trouver.

Table des matières