Histoire 1
Pierre-Simon de Laplace a été le premier à écrire un ouvrage exposant l'état des connaissances dans le domaine des probabilités. Il s'agit de la *théorie analytique des probabilités* (1812). Dans ce texte, Laplace expose d'abord une série de résultats d'analyse (fonctions génératrices, transformée de Laplace ...) qui lui permettent de démontrer des résultats de probabilités, et en particulier le théorème de Moivre-Laplace de convergence d'une loi de probabilité discrète vers une loi de probabilité continue.

Théorème : *Soit $p \in]0;1[$. On suppose que pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire X_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$.*
Soit $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, la variable centrée et réduite associée à X_n.
Pour tous réels a et b on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$
La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ est la densité de la variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

1 Loi à densité

1.1 Variable aléatoire continue

Définition 1

- Une **variable aléatoire réelle** est une fonction définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire munie d'une loi de probabilité $\mathbb{P}$ et à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
- Si l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par une variable aléatoire réelle X est un intervalle alors X est une **variable aléatoire continue**.
- La **loi de probabilité** d'une variable aléatoire permet de déterminer les probabilités d'événements définis par $[X = k]$, $[a \leqslant X]$, $[X \leqslant b]$ ou $[a \leqslant X \leqslant b]$.

Capacité 1 ***Distinguer variable aléatoire discrète et variable continue***

1. Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,4$. X est-elle une variable continue ?
2. Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire Y suivant une loi géométrique de paramètre $p = 0,4$. Y est-elle une variable continue ?
3. Un métro passe toutes les minutes à la station *Hôtel de ville*. On considère un voyageur arrivant aléatoirement sur le quai et la variable aléatoire T donnant son temps d'attente.
   a. Quelles sont les valeurs possibles pour T ? T est-elle une variable continue ?
   b. Déterminer les probabilités $\mathbb{P}(T \leqslant 0,25)$, $\mathbb{P}(0,25 \leqslant T)$ et $\mathbb{P}(0,25 \leqslant T \leqslant 0,4)$.

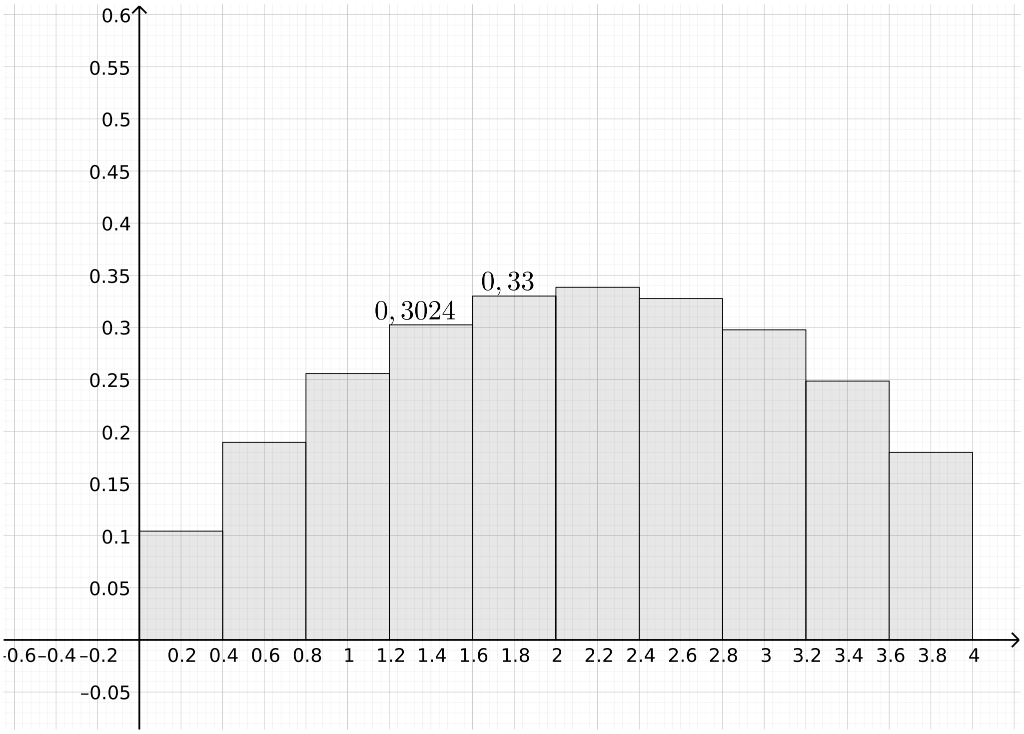
1.2 Variable aléatoire à densité

Activité 1

On considère un certain modèle de smartphone. Soit T la variable aléatoire réelle continue qui à chaque smartphone associe sa durée de vie en années. Cette durée peut prendre toute valeur de l'intervalle $[0;4]$. On souhaite déterminer la probabilité $\mathbb{P}(1,2 \leqslant T \leqslant 2)$ qu'un smartphone pris au hasard ait une durée de vie comprise entre 1,2 et 2 ans.

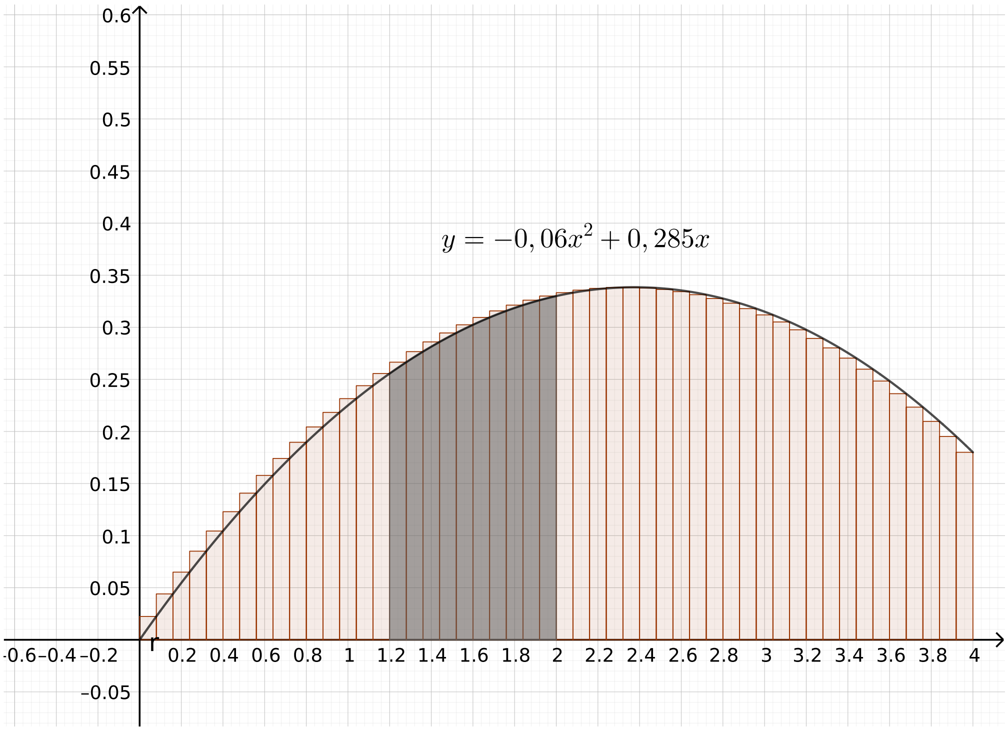
1. On dispose tout d'abord de l'histogramme ci-dessous réalisé à partir d'un échantillon de smartphones avec en abscisse la durée de vie. Les mesures de durée de vie ont été regroupées dans 10 classes d'amplitude 0,4. Chaque intervalle de classe porte un rectangle dont l'aire est la probabilité que la valeur de T appartienne à cette classe.

   Ainsi, on a $\mathbb{P}(1,2 \leqslant T \leqslant 1,6) = \text{bas}_{rectangle} \times \text{hauteur}_{rectangle} = (1,6-1,2) \times 0,3024 \approx 0,121$.



   En déduire une estimation de $\mathbb{P}(1,2 \leqslant T \leqslant 2)$.

2. Un échantillon de taille plus importante a été réalisé ce qui a permis de regrouper les mesures dans des classes plus nombreuses et de plus faible amplitude : 50 classes d'amplitude 0,08.



En augmentant encore la taille de l'échantillon et le nombre de classes, on observe que les hauteurs des rectangles de l'histogramme suivent la courbe d'une fonction f définie sur $[0\,;\,4]$ par

$$f(x) = -0,06x^2 + 0,285x$$

a. Vérifier que $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

b. Comment pourrait-on calculer une valeur approchée de $\mathbb{P}\left(1,2 \leqslant T \leqslant 2\right)$ à l'aide de la courbe de la fonction f ?

Définition 2 *Densité de probabilité*

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une **fonction de densité de probabilité de support I** si les quatre conditions suivantes sont vérifiées :

- f est nulle en dehors de l'intervalle I ;
- f est continue sur I (sauf peut-être en un nombre fini de points où les limites à droite et à gauche existent) ;
- f est positive sur I : pour tout réel $t \in \mathrm{I}$ on a $f(t) \geqslant 0$;
- l'aire située sous la courbe $\mathscr{C}_f$ sur I est égale à 1 unité d'aire : $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$

c'est-à-dire $\begin{cases} \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 1 \quad \text{si I}=[a\,;\,b] \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 \quad \text{si I}=[a\,;\,+\infty[\\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 \quad \text{si I}=]-\infty\,;\,a] \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty}\int_x^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \lim_{y\to+\infty}\int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 \quad \text{si I}=]-\infty\,;\,+\infty[\end{cases}$

Définition 3 ***Variable à densité***

Soit X une variable aléatoire continue et I l'intervalle des valeurs possibles pour X.
X est une **variable aléatoire de densité f sur I** s'il existe une fonction de densité de support I telle que :

- pour tout intervalle J inclus dans I, la probabilité que X appartienne à J est égale à l'aire sous la courbe de f sur J :

$$\mathbb{P}(X \in \mathrm{J}) = \int_{\mathrm{J}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

- en particulier, pour tout intervalle $[a\,;\,b]$ inclus dans I, on a :

$$\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Capacité 2 ***Déterminer si une fonction est une densité de probabilité***

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(t) = 0,2 \text{ si } t \in [2\,;\,7] \\ f(t) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Démontrer que f est une densité de probabilité de support $I = [2\,;\,7]$.

2. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $F(t) = 1 - (2t+1)\mathrm{e}^{-2t}$.

a. Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer sa dérivée F'.

b. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(t) = F'(t) \text{ si } t \geqslant 0 \\ f(t) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Démontrer que f est une fonction de densité de probabilité de support $[0\,;\,+\infty[$.
On admettra que $\displaystyle\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^y} = 0$.

c. Soit X une variable aléatoire de densité f sur $[0\,;\,+\infty[$, calculer $P(2 < X < 3)$.

Propriété 1 ***Calculs de probabilités pour une variable à densité***

Soit X une variable aléatoire réelle de densité f sur intervalle I. Pour tous réels a et b dans I :

1. $\mathbb{P}\left(X \in [a\,;\,b]\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\mathbb{P}\left(X = a\right) = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$
2. $\mathbb{P}\left(X > a\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X \leqslant a\right)$ et $\mathbb{P}\left(a < X \leqslant b\right) = \mathbb{P}\left(X \leqslant b\right) - \mathbb{P}\left(X \leqslant a\right)$
3. Pour une loi à densité, on peut remplacer les inégalités larges par des inégalités strictes et réciproquement :
$$\mathbb{P}\left(X < a\right) = \mathbb{P}\left(X \leqslant a\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(a \leqslant \mathrm{X} \leqslant b\right) = \mathbb{P}\left(a < \mathrm{X} < b\right) = \mathbb{P}\left(a \leqslant \mathrm{X} < b\right) = \mathbb{P}\left(a < \mathrm{X} \leqslant b\right) \quad .$$

1.3 Fonction de répartition

Définition 4

Soit X une variable aléatoire continue.
La **fonction de répartition** F de X est définie pour tout réel x par :

$$\mathbb{P}\left(X \leqslant x\right) = F(x)$$

Propriété 2

Si X est une variable aléatoire continue de densité de probabilité f sur un intervalle I, alors sa fonction de répartition F est une primitive de f sur I.

Capacité 3 ***Déterminer une fonction de répartition de loi à densité***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(t) = 3\,\mathrm{e}^{-3t} \text{ si } t \geqslant 0 \\ f(t) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Démontrer que f est une fonction de densité de probabilité de support $[0\,;\,+\infty[$.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f sur $[0\,;\,+\infty[$.
   Déterminer une expression de la fonction de répartition F de X.

1.4 Espérance

Définition 5 ***Espérance d'une loi à densité***

Soit X une variable aléatoire continue de densité f sur un intervalle $[a;b]$.
L'espérance de X notée $\mathrm{E}(X)$ est définie par :

$$\boxed{\mathrm{E}(X) = \int_a^b t \times f(t)\,\mathrm{d}t}$$

Comme pour les lois discrètes, l'espérance est un indicateur de tendance centrale pour une loi à densité.

Remarque 1

Si X est une variable de densité f sur un intervalle I non borné, on définit, *si la limite existe*, l'espérance $\mathrm{E}(X)$ à l'aide d'une limite d'intégrale.

- Si I=$[a\,;+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x t\times f(t)\,\mathrm{d}t$ existe alors : $\mathrm{E}(X)=\int_a^{+\infty} t\times f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si I=$]-\infty\,;b]$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^b t\times f(t)\,\mathrm{d}t$ existe alors : $\mathrm{E}(X)=\int_{-\infty}^{b} t\times f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si I=$]-\infty\,;+\infty[$, et $\lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^0 t\times f(t)\,\mathrm{d}t+\lim\limits_{y\to+\infty}\int_0^y t\times f(t)\,\mathrm{d}t$ existe alors : $\mathrm{E}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} t\times f(t)\,\mathrm{d}t$.

Définition 6 ***Variance d'une loi à densité***

Soit X une variable aléatoire de densité f sur un intervalle $[a\,;b]$ et soit $\mathrm{E}(X)$ son espérance.

☞ La **variance** de X notée $\mathrm{V}(X)$ est définie par $\boxed{\mathrm{V}(X)=\int_a^b (t-\mathrm{E}(X))^2\times f(t)\,\mathrm{d}t}$.

☞ L'**écart-type** de X est défini par $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.

Comme pour les lois discrètes, la variance et l'écart-type sont des indicateurs de dispersion pour une loi à densité.

Remarque 2

Si X est une variable de densité f sur un intervalle I non borné et si X possède une espérance alors on définit, *si la limite existe*, sa variance $\mathrm{V}(X)$ à l'aide d'une limite d'intégrale.

- Si I=$[a\,;+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x (t-\mathrm{E}(X))^2\times f(t)\,\mathrm{d}t$ existe alors : $\mathrm{V}(X)=\int_a^{+\infty}(t-\mathrm{E}(X))^2\times f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si I=$]-\infty\,;b]$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^b (t-\mathrm{E}(X))^2\times f(t)\,\mathrm{d}t$ existe alors : $\mathrm{V}(X)=\int_{-\infty}^{b}(t-\mathrm{E}(X))^2\times f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si I=$]-\infty\,;+\infty[$ et $(X)=\lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^0 (t-\mathrm{E}(X))^2\times f(t)\,\mathrm{d}t+\lim\limits_{y\to+\infty}\int_0^y (t-\mathrm{E}(X))^2\times f(t)\,\mathrm{d}t$ existe alors :

$$\mathrm{V}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(t-\mathrm{E}(X))^2\times f(t)\,\mathrm{d}t$$

Capacité 4 ***Calculer l'espérance ou la variance d'une loi à densité***

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(t) = \frac{1}{6}t + \frac{1}{3} \text{ si } t \in [0\,;2] \\ f(t) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

   a. Démontrer que f est densité de probabilité.

   b. Soit X une variable aléatoire de densité f.
   Calculer l'espérance et la variance de X.

2. Soit Y une variable aléatoire de densité g définie par $g(t) = \frac{3}{t^4}$ si $t \geqslant 1$ et $g(t) = 0$ sinon.

   Démontrer que Y possède une espérance et une variance.

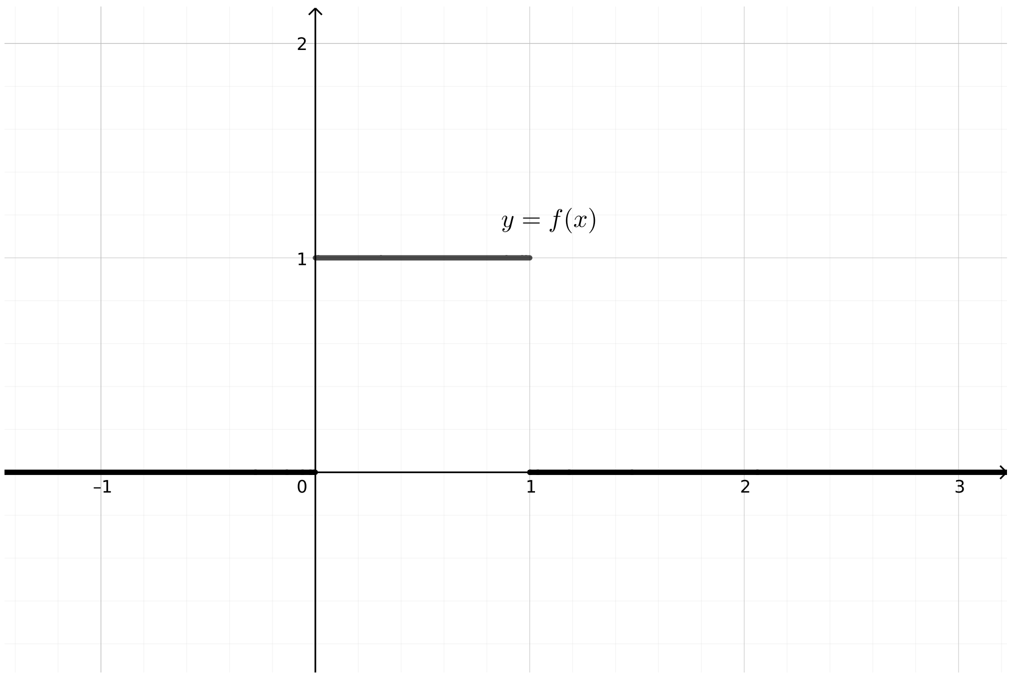
2 Loi uniforme

2.1 Loi uniforme continue sur l'intervalle $[0\,; 1]$

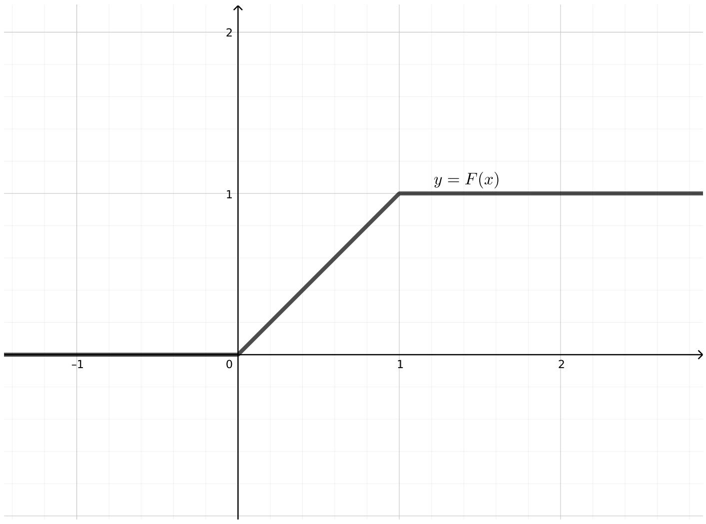
Définition 7

Une variable aléatoire X suit la **loi uniforme continue** sur $[0; 1]$ si elle admet pour densité de probabilité f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(t) = 1 \text{ si } t \in [0; 1] \\ f(t) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$



Propriété 3 ***Fonction de répartition, calcul de probabilité, espérance***



Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme continue sur $[0\,;1]$.

1. La fonction de répartition F de X est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{F(x) = 0 \text{ si } x < 0 \quad \text{et} \quad F(x) = x \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad F(x) = 1 \text{ si } x > 1}$$

2. Pour tous réels c et d tels que $0 \leqslant c \leqslant d \leqslant 1$ on a :

$$\boxed{P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d 1 \,\mathrm{d}t = d - c}$$

3. X admet une **espérance mathématique** de : $\boxed{\mathrm{E}(X) = \frac{1}{2}}$.

4. X admet pour **variance** $\boxed{\mathrm{V}(X) = \frac{1}{12}}$ et un **écart-type** de $\boxed{\sigma(X) = \frac{1}{2\sqrt{3}}}$.

Démonstration

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2.2 Loi uniforme continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$

Définition 8

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.
Une variable aléatoire X suit la **loi uniforme continue** sur $[a\,;\,b]$ si elle admet pour densité de probabilité f la fonction définie sur $[a\,;\,b]$ par :

$$\begin{cases} f(t) = \dfrac{1}{b-a} \text{ si } t \in [a\,;\,b] \\ f(t) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Propriété 4 ***Calcul de probabilité, fonction de répartition, espérance***

Soit deux réels a et b tels que $a < b$ et X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[a\,;\,b]$.

1. La fonction de répartition F de X est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{F(x) = 0 \text{ si } x < a \quad \text{et} \quad F(x) = \frac{x-a}{b-a} \text{ si } a \leqslant x \leqslant b \quad \text{et} \quad F(x) = 1 \text{ si } x > b}$$

2. Pour tous réels c et d tels que $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$ on a :

$$\boxed{P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t = \frac{d-c}{b-a}}$$

3. X admet une **espérance mathématique** de : $\boxed{\mathrm{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}}$.

4. X admet pour **variance** $\boxed{V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}}$ et un **écart-type** $\boxed{\sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}}$.

Démonstration

1. Soit F la fonction de répartition de X.

Puisque X prend ses valeurs dans l'intervalle $[a\,;\,b]$:

- si $x < a$ alors l'événement $X \leqslant x$ est impossible donc $F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = 0$.
- si $x > b$ alors l'événement $X \leqslant x$ est certain donc $F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = 1$.

Soit x dans l'intervalle $[a\,;\,b]$.

$F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant x) = \int_a^x \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t = \frac{x-a}{b-a}$.

2. Par définition de la loi de densité la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{b-a}$ sur $[a\,;\,b]$, pour tous réels c et d tels que $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$, $P(c \leqslant X \leqslant d)$ est l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$ entre les abscisses c et d, c'est-à-dire :

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t$$

Par linéarité de l'intégrale on a :

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \frac{1}{b-a}\int_c^d \mathrm{d}t = \frac{d-c}{b-a}$$

3. La fonction $g : t \mapsto t \times f(t)$ soit $g : t \mapsto \frac{t}{b-a}$ est continue donc intégrable sur $[a\,;\,b]$, donc la variable aléatoire X de densité f sur $[a\,;\,b]$ admet une espérance mathématique et on a :

$$\mathrm{E}(X) = \int_a^b \frac{t}{b-a}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{b-a}\int_a^b t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

4. La fonction $h : t \mapsto \left(t - \frac{b+a}{2}\right)^2 \times f(t)$ soit $h : t \mapsto \left(t - \frac{b+a}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a}$ est continue donc intégrable sur $[a\,;\,b]$, donc la variable aléatoire X de densité f sur $[a\,;\,b]$ admet une variance et on a :

$$V(X) = \int_a^b \left(t - \frac{b+a}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(t - \frac{b+a}{2}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{3}\left(t - \frac{b+a}{2}\right)^3\right]_a^b$$

$$V(X) = \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^3\right] = \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 + \frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3\right] = \frac{2(b-a)^3}{24(b-a)} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Capacité 5 *Déterminer la fonction de répartition d'une loi uniforme continue*

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme continue sur l'intervalle $[-2\,;\,8]$.

1. Déterminer la fonction de répartition F de X et représenter graphiquement F.

2. En déduire les probabilités suivantes :

a. $\mathbb{P}(X \leqslant 0)$ **b.** $\mathbb{P}(-1 < X < 3)$ **c.** $\mathbb{P}(3 \leqslant X)$

Capacité 6 ***Utiliser une loi uniforme continue***

Un détaillant constate que ses melons se vendent bien lorsque leur masse est comprise entre 900 g et 1 200 g. Dans la suite, de tels melons sont qualifiés « conformes ».
Le détaillant achète ses melons auprès d'un maraîcher chez lequel, la masse en gramme des melons est modélisée par une variable aléatoire M_A qui suit une loi uniforme continue sur l'intervalle $[850\ ;\ x]$, où x est un nombre réel supérieur à 1 200.

1. Le détaillant constate que 75 % des melons du maraîcher sont conformes. Déterminer x.
2. En déduire la masse moyenne d'un melon du maraîcher.

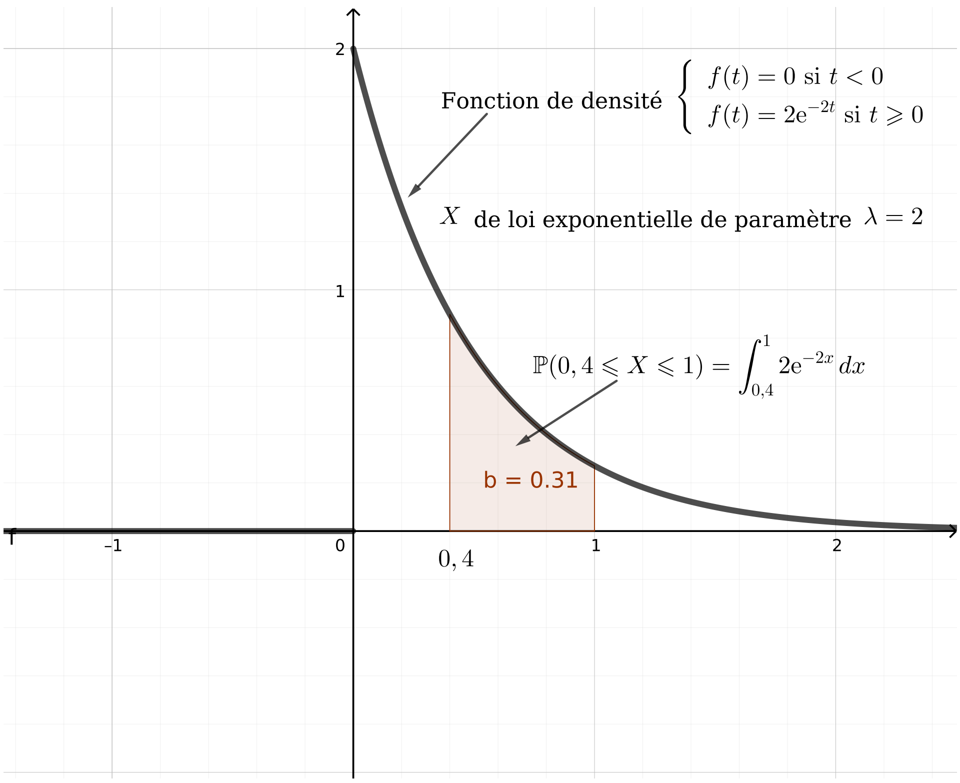
3 Loi exponentielle

3.1 Définition

Définition 9

Une variable aléatoire T suit la **loi exponentielle de paramètre** $\lambda > 0$ si elle admet pour densité la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(t) = 0 \text{ si } t < 0 \\ f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \text{ si } t \geqslant 0 \end{cases}$$



3.2 Propriétés

Propriété 5

Soit une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. La fonction de répartition de T est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{F(x) = 0 \text{ si } x < 0 \quad \text{et} \quad F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \text{ si } 0 \leqslant x}$$

2. Pour tous réels α et β tels que $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta$ on a :

$$\boxed{\mathrm{P}\left(\alpha \leqslant T \leqslant \beta\right) = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-\lambda\alpha} - \mathrm{e}^{-\lambda\beta}}$$

   En particulier on a :

$$\boxed{\mathrm{P}\left(T \leqslant \beta\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\beta} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}\left(T > \alpha\right) = \mathrm{e}^{-\lambda\alpha}}$$

3. T admet une espérance mathématique de valeur $\boxed{\mathrm{E}(T) = \dfrac{1}{\lambda}}$.

   T admet une variance de valeur $\boxed{\mathrm{V}(T) = \dfrac{1}{\lambda^2}}$ et un écart-type de valeur $\boxed{\sigma(T) = \dfrac{1}{\lambda}}$.

   On peut noter que cette expression de l'espérance en fonction du paramètre de la loi rappelle celle d'une variable aléatoire discrète suivant une loi géométrique.

Démonstration

1. La fonction $t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$ donc elle admet des primitives sur $[0\,;+\infty[$, de la forme $t \mapsto -\mathrm{e}^{-\lambda t} + k$.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

2. ....

   ....

   ....

   ....

....

....

....

....

....

3. Le calcul de l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle est admis.

Capacité 7 *Utiliser une loi exponentielle*

La variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,3$.

1. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(X \leqslant 1)$, $\mathbb{P}(X > 2)$ et $\mathbb{P}_{X>1}(X > 2)$.

2. Déterminer l'espérance et la variance de X.

Propriété 6 *Propriété de durée de vie sans vieillissement*

Soit une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Pour tous réels t et h positifs on a :

$$\mathbb{P}_{T \geqslant t}(T \geqslant t+h) = \mathrm{P}(T \geqslant h)$$

On peut noter que cette propriété de loi sans mémoire est commune aux variables aléatoires discrètes suivant une loi géométrique et aux variables à densité suivant une loi exponentielle.

Démonstration *ROC*

Soit A l'événement « $T \geqslant t+h$ » et B l'événement « $T \geqslant t$ ».
D'après la propriété 5 on a $\mathrm{P}(T \geqslant t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} > 0$ donc, $\mathrm{P}_{T \geqslant t}(T \geqslant t+h) = \ldots$.

....

....

....

....

....

....

....

Capacité 8 ***Utiliser une loi exponentielle***

La durée de vie, en années, d'un composant électronique fabriqué dans une usine, est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ (où λ est un nombre réel strictement positif).

1. Démontrer que $\lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}(T \leqslant t) = 1$.

2. On suppose que $\mathbb{P}(T \leqslant 7) = 0,5$. Déterminer λ à 10^{-3} près.

3. Dans cette question on prend $\lambda = 0,099$ et on arrondit les résultats des probabilités au centième.

a. On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine.
Déterminer la probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans.

b. On choisit au hasard un composant parmi ceux qui fonctionnent encore au bout de 2 ans.
Déterminer la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure à 7 ans.

c. Déterminer l'espérance mathématique $\mathbb{E}(T)$ de la variable aléatoire T à l'unité près.
Interpréter ce résultat.

4 Thème du programme

Thème 1 ***Temps d'attente***

Désintégration d'un atome d'iode radioactif. Indice Problème 1 p. 244

Table des matières