Histoire 1

Inscrit à 18 ans à l'Université de Cambridge, Isaac Newton doit rentrer se confiner au manoir familial lorsque la peste se déclare quatre ans plus tard. En 1665 et 1666, il profite de son inactivité pour inventer l'essentiel des mathématiques et de la physique moderne au cours de son *année miraculeuse* : la théorie de l'optique, la méthode des fluxions, la théorie des couleurs et les prémices de la théorie de la gravitation universelle ! Dans son ouvrage posthume (1740) « La méthode des fluxions » il distingue deux classes de problèmes :

- Problème I : « *étant donnée la relation des quantités fluentes (y et x), trouver la relation de leurs fluxions ($\mathring{x} = dx$ et $\mathring{y} = dy$)* », il s'agit d'un problème de dérivation en langage moderne.
- Problème II : « *Étant donnée la relation des fluxions, trouver celle des quantités fluentes* ». La relation des fluxions, est une relation faisant intervenir des fonctions et leurs dérivées, autrement dit, une équation différentielle en langage moderne. Par exemple il peut s'agir de déterminer la trajectoire d'un objet à partir de sa position initiale et de la loi de sa vitesse.

Source : *Bernard Ycart :* https://hist-math.fr/newtona-auto#.

1 Équation différentielle $y' = f$ et primitive d'une fonction

Définition 1

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Les définitions suivantes sont équivalentes :

- ☞ Toute fonction y, qui est solution de l'équation différentielle $y' = f$ avec y dérivable sur I, est une **primitive** de la fonction f.
- ☞ Une fonction F dérivable sur I, telle que pour tout réel $x \in$ I, on a $F'(x) = f(x)$, est une **primitive** de la fonction f.

Capacité 1 *Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle $y' = f$ ⇒ exo 1 p. 121*

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

  a. Vérifier que la fonction F définie sur R par $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$ est une primitive de f.

  b. Déterminer d'autres primitives de la f.

2. Compléter le tableau de primitives :

Fonction f	Intervalle I	Une primitive F parmi une infinité ...
$f(x)=1$	$\mathbb{R}$	....
$f(x)=x$	$\mathbb{R}$	....
$f(x)=3x-2$	$\mathbb{R}$	....
$f(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}$	$]0\,;+\infty[$	....
$f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$	$\mathbb{R}$	....

1.1 Propriété des primitives

Propriété 1

1. Toute fonction f continue sur un intervalle I, admet des primitives sur I.
2. Si f est une fonction continue sur un intervalle I et F est une primitive de f, alors la fonction G définie sur I par $G(x)=F(x)+k$ avec k constante réelle, est aussi une primitive de f.
3. Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.
4. Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

   Il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0)=y_0$.

   Autrement dit l'équation différentielle $y'=f$ possède une unique fonction solution F définie et dérivable sur I telle que $F(x_0)=y_0$.

Démonstration ***Au programme***

1. L'existence d'une primitive pour une fonction f continue sur un intervalle I, sera démontrée dans le chapitre sur le calcul intégral.
2.
   - Hypothèses : f est une fonction continue sur un intervalle I, F est une primitive de f et G est définie sur I par $G(x)=F(x)+k$ avec k constante réelle.
   - Raisonnement :

     ....

     ....

     ....

     ....

   - Conclusion : G est une primitive de f.
3.
   - Hypothèses : f est une fonction continue sur un intervalle I, F et G sont deux primitives de f.
   - Raisonnement :

     ....

. . . .

. . . .

. . . .

- Conclusion : Il existe une constante réelle k telle que pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a $F(x) - G(x) = k$.

Capacité 2 *Vérifier qu'une fonction est un primitive d'une autre fonction ⇒ exo 3 p.123*

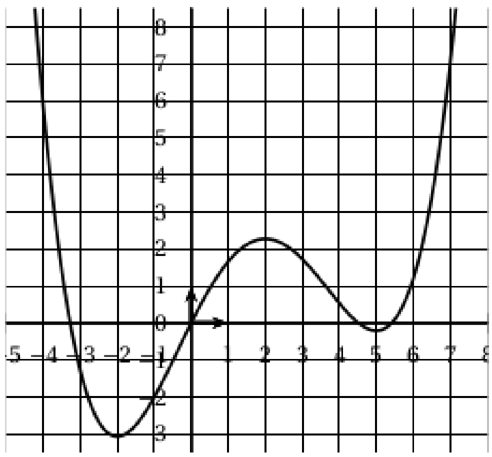
Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;4]$ par $f(x) = (3,6x + 2,4)\mathrm{e}^{-0,6x} - 1,4$.

1. Vérifier que la fonction que la fonction F définie par $F(x) = (-6x - 14)\mathrm{e}^{-0,6x} - 1,4x$ est une primitive de f.

2. Déterminer la solution sur $[0\,;4]$ de l'équation différentielle $y' = f$ qui vérifie $y(0) = 10$.

Capacité 3 *Échelle des dérivées*

On considère la courbe d'une fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

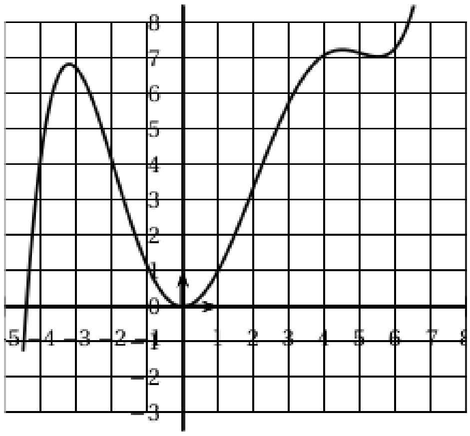


Pour chaque question, sélectionner la ou les bonne(s) réponse(s).

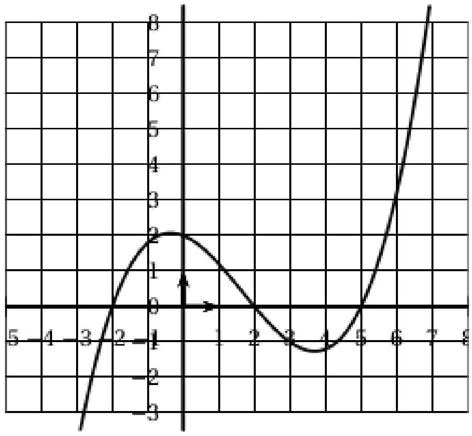
1. Soit f' la dérivée de f et F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

   - (A_1) : f' est positive sur $[2\ ;\ 4]$.
   - (A_2) : f' est négative sur $[-4,5\ ;\ -4]$
   - (A_3) : F est décroissante sur $[2\ ;\ 4]$.
   - (A_4) : F est décroissante sur $[-3\ ;\ -1]$.

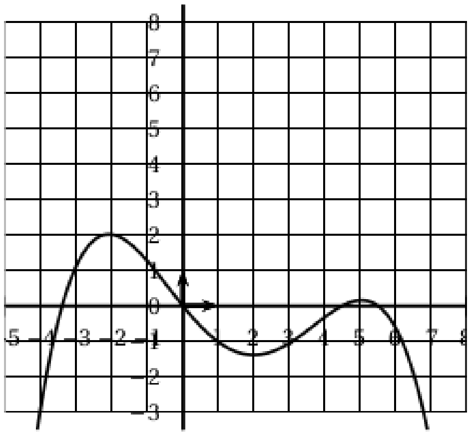
a.



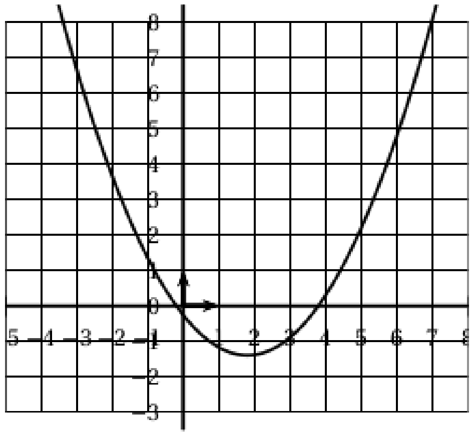
b.



c.



d.



2. Une des courbes ci-dessus représente la fonction f''. Laquelle ?

2 Recherche de primitives

2.1 Tableau des primitives des fonctions usuelles

Le tableau 2.1 de la présente page donne, pour chaque fonction f de référence, les fonctions primitives F sur l'intervalle considéré, il s'obtient à partir du tableau des dérivées en vérifiant que $F' = f$.

Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	Primitive F ($C \in \mathbb{R}$ constante)	Intervalle I
$f(x) = m$ (constante)	$F(x) = mx + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + C$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
Plus généralement : $f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{Z}$ et $n \neq -1$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$\mathbb{R}$ (si $n \geqslant 0$) $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$ (si $n < -1$)
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$ (pour $x > 0$)	$F(x) = \ln(x) + C$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$ (pour $x < 0$)	$F(x) = \ln(-x) + C$	$]-\infty; 0[$
$f(x) = \frac{1}{x}$ (pour $x \neq 0$)	$F(x) = \ln(\lvert x \rvert) + C$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \mathrm{e}^x$ (exponentielle de base e)	$F(x) = \mathrm{e}^x + C$	$\mathbb{R}$

Capacité 4 ***Calculer une primitive en utilisant les primitives de référence $\Rightarrow$ exo 5 p.123***

1. Pour chacune des fonctions f suivantes, continue sur I, déterminer l'ensemble des primitives de f sur $]0; +\infty[$.

   a. $f(x) = 4$ sur $I = \mathbb{R}$;
   b. $f(x) = 0$ sur $I = \mathbb{R}$;
   c. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $I =]0; +\infty[$;
   d. $f(x) = 3 + x + x^4$ sur $I = \mathbb{R}$;
   e. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ sur $I =]0; +\infty[$;
   f. $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ sur $I = \mathbb{R}$;
   g. $f(x) = \frac{-1}{x}$ sur $I =]-\infty; 0[$.

2. Démontrer que la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $F : x \mapsto x\ln x - x + 1$ est une primitive de la fonction ln. Déterminer la primitive de la fonction ln qui s'annule en $\sqrt{\mathrm{e}}$.

2.2 Tableau d'opérations sur les primitives

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. On a alors les propriétés résumées dans le tableau 2.2 de la présente page. Là encore, les résultats de ce tableau s'obtiennent en vérifiant qu'on a bien $F' = f$ sur l'intervalle considéré.

Opérations sur les primitives

Conditions	f s'écrivant sous la forme	admet comme primitive F (à une constante C près)
Pour tout $x \in \mathrm{I}$	$u' + v'$	$u + v + C$
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une constante	$\lambda u'$	$\lambda u + C$
Pour tout $x \in \mathrm{I}$	$u'u$	$\frac{1}{2}u^2 + C$
Pour tout $x \in \mathrm{I}$ et tout $n \in \mathbb{N}$	$u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + C$
Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $u(x) \neq 0$	$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + C$
Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $u(x) \neq 0$	$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u \rvert) + C$
Pour tout $x \in \mathrm{I}$	$u'\mathrm{e}^u$	$\mathrm{e}^u + C$

Remarque 1

La fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle est continue sur $\mathbb{R}$ mais on ne peut pas donner de forme explicite de celles-ci.

Capacité 5 *Calculer une primitive de fonction de la forme* $(v' \circ u) \times u' \Rightarrow$ ***exo 6 p.123***

Pour chacune des fonctions f suivantes, continues sur un intervalle I, déterminer l'ensemble des primitives de f sur I.

1. $f(x) = x^2 - 2x - 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \mathrm{e}^x$ sur $\mathrm{I} =]0\,; +\infty[$;
2. $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$;
3. $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$;
4. $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x} + 1}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$;
5. $f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^{x^2}}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+^*$;
6. $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ sur $\mathrm{I} =]0\,; 1[\cup]1\,; +\infty[$;

Table des matières