Histoire 1

- Archimède (vers 287−212 avant JC) est un mathématicien, physicien et inventeur de langue grecque qui vécut à Syracuse en Sicile. Dans *La méthode*, il démontre que l'aire $\mathscr{A}$ d'un disque est égale à l'aire $\mathscr{T}$ d'un triangle rectangle de hauteur le rayon R et de base la circonférence $2\pi R$. Il examine tous les cas possibles (méthode d'exhaustion) et prouve par l'absurde qu'on ne peut avoir ni $\mathscr{A} > \mathscr{T}$, ni $\mathscr{A} < \mathscr{T}$. Il s'appuie sur un axiome de continuité « *En la divisant successivement par* 2*, on peut rendre une quantité aussi petite que l'on veut* » et encadre l'aire du disque par celles de polygones inscrits et exinscrits avec un nombre croissants de côtés. Il obtient ainsi un encadrement de π remarquable pour l'époque $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$. Ce principe sera repris bien plus tard pour approcher les nombres irrationnels par des suites.

- Héron d'Alexandrie (vers 170 – 117 avant JC) est un physicien et mathématicien grec, célèbre pour sa formule de l'aire d'un triangle de côtés a, b et c en fonction de son demi-périmètre p : $\mathscr{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Son nom est associé à un algorithme d'approximation de $\sqrt{2}$, connu des Babyloniens 400 ans avant, noté actuellement sous la forme de la suite $r_0 = 2$ et $r_{n+1} = \frac{1}{2}\left(r_n + \frac{2}{r_n}\right)$.

- Léonard de Pise, dit Fibonacci (1175 – 1240) est un mathématicien italien auteur du *Liber abaci* (1202), un recueil de problèmes algébriques, où il popularisa l'usage des chiffres arabes. Un énoncé est resté célèbre : « *Possédant au départ un couple de lapins, combien de couples de lapins obtient-on en douze mois si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du second mois de son existence ?* », il se modélise avec la suite $f_0 = f_1 = 1$ et $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. On démontre que le rapport f_{n+1}/f_n tend vers le nombre d'Or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

1 Suite numérique

Définition 1

Une suite est une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.
Si u est le nom de la suite, l'image de n par u se note $u(n)$ (notation fonctionnelle) ou de manière plus usuelle u_n (notation indicielle).
L'ensemble des termes de la suite se note alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 2

Une suite permet de modéliser l'évolution d'une grandeur qu'on peut indexer sur des entiers (jours, mois, années ...), on parle de **modèle discret**.

Définition 3 ***Sens de variation***

- Une suite (u_n) est **croissante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geqslant p$ on a $u_n \leqslant u_{n+1}$.
- Une suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geqslant p$ on a $u_n \geqslant u_{n+1}$.
- Une suite (u_n) est **constante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geqslant p$ on a $u_{n+1} = u_n$.

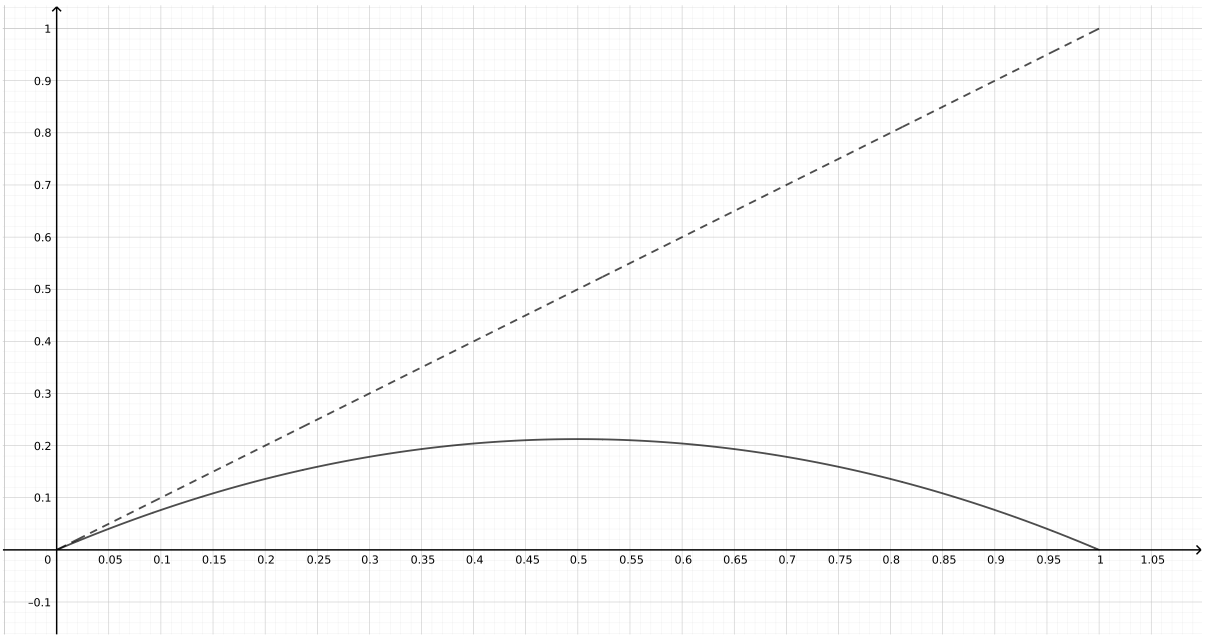
Capacité 1 ***Modéliser une situation par une suite***

On s'intéresse à une population de phoques vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante.
Au début de l'an 2000, on comptait 500 phoques. Une étude a permis de modéliser ce nombre de phoques par la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0,5 \\ u_{n+1} & = & 0,85u_n(1-u_n) \end{array}\right.$$

où pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre de phoques, en milliers, au début de l'année $2000+n$.
Dans les calculs, on arrondira les nombres de phoques à l'unité.

1. Calculer, dans ce modèle, le nombre de phoques au début de l'année 2001 puis de l'année 2002.
2. On a représenté sur le graphique ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par $f : x \mapsto 0,85x(1-x)$ et la droite Δ d'équation $y = x$.



Construire les quatre premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses en appliquant l'algorithme suivant :

- Étape 1 : on place $u_0 = 0,5$ sur l'axe des abscisses ;

- Étape 2 : on construit l'ordonnée $u_1 = f(u_0)$ du point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse u_0 sur l'axe des ordonnées et on le projette sur l'axe des abscisses en prenant l'abscisse du point de la droite Δ dont il est l'ordonnée, puis on reprend l'étape 1 avec u_1 ;

3. **a.** Calculer des valeurs approchées des dix premiers termes de la suite (u_n) avec le mode suite de sa calculatrice.

b. Reporter les premiers termes dans la capture de feuille de tableur ci-dessous. Quelle formule faudrait-il saisir en `A3` et `B3` pour compléter la feuille de calcul ?

	A	B
1	n	u_n
2	0	$0,5$
3	1	...
4	2	...
5	3	...

4. Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et les valeurs prises par u_n lorsque n devient très grand ?

En donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

2 Suites arithmétiques et géométriques

2.1 Suites arithmétiques

Les preuves des propriétés ont été établies en classe de première

Définition 4

Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel r est la raison de la suite.

Propriété 1

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + n \times r$$

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}, \quad u_p = u_q + (p-q) \times r$$

Théorème 1

Une suite (u_n) est arithmétique de raison r si et seulement s'il existe deux réels a et r tels que :

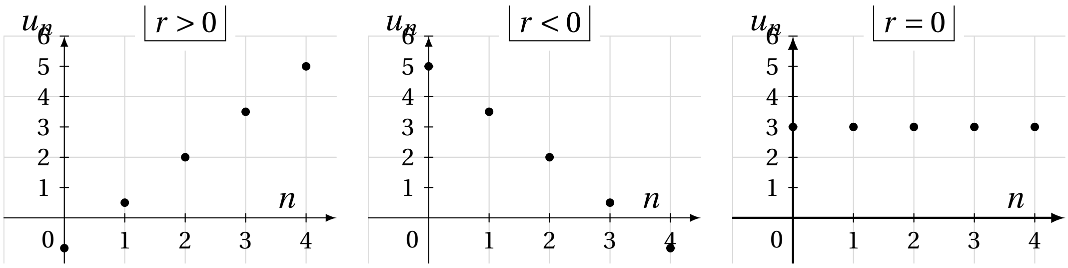
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a + nr$$

Une suite est arithmétique si et seulement si sa représentation graphique dans un repère est constituée de points alignés.

Propriété 2 ***Sens de variation***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si $r > 0$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si $r = 0$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si $r < 0$.



Propriété 3 ***Somme des termes consécutifs***

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Plus généralement, pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $q \in \mathbb{N}$ tel que $q \geqslant p$ on a :

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{q-1} + u_q = (q-p+1) \times \frac{u_p + u_q}{2} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

En particulier pour la suite arithmétique telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$ on a :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Capacité 2 ***Étudier une suite arithmétique***

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite arithmétique de raison 4 et telle que $u_5 = 30$.

1. Calculer u_{10}.
2. Soit un entier $n \geqslant 1$, exprimer u_n en fonction de n.
3. Soit un entier $n \geqslant 1$, exprimer la somme de termes consécutifs $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n$ en fonction de n.
4. Existe-t-il un entier naturel n tel que $s_n = 1200$?

2.2 Suites géométriques

Les preuves des propriétés ont été établies en classe de première

Définition 5

Une suite (u_n) est géométrique s'il existe un réel q tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q \times u_n$$

Le réel q est la raison de la suite.

Propriété 4

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 \times q^n$$

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \quad u_m = u_p \times q^{m-p}$$

Propriété 5

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Plus généralement, Pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geqslant p$ on a :

$$\sum_{k=p}^{m} u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{m-1} + u_m = u_p \times \frac{1-q^{m-p+1}}{1-q} = \text{premier terme} \times \frac{1-raison^{\text{nombre de termes}}}{1-raison}$$

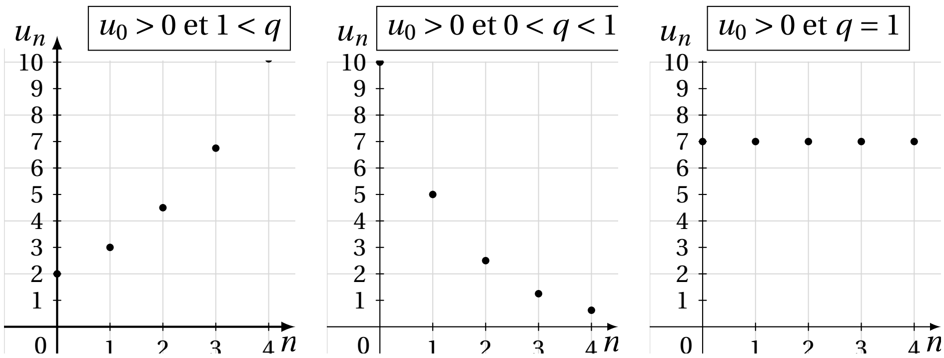
En particulier pour la suite géométrique telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n$ avec $q \neq 1$ on a :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Propriété 6 ***Sens de variation***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme $u_0 > 0$.

- Si $0 < q < 1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
- Si $q = 1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
- Si $1 < q$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.



Capacité 3 ***Étudier le sens de variation d'une suite géométrique***

Dans chaque cas, u désigne une suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$. On donne une expression de son terme général u_n. Déterminer la raison de la suite u et son sens de variation.

1. Pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = 0,4 \times 1,5^n$.
2. Pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = 4 \times 0,5^n$.
3. Pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = \mathrm{e}^{1-n}$.
4. Pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = \dfrac{(-\mathrm{e}^n)^3}{(\mathrm{e}^2)^n}$.

Capacité 4 ***Étudier une suite géométrique***

Un globe-trotter a comme objectif de parcourir 200 km à pied. Il peut parcourir 40 km en une journée, mais, la fatigue s'accumulant, la distance qu'il parcourt diminue de 3 % chaque nouvelle journée.
On note la distance D_n la distance parcourue durant le n-ième jour.
Le premier jour de son périple, il parcourt donc $D_1 = 40 km$.

1. Calculer la distance parcourue le deuxième jour.
2. Soit n un entier naturel, exprimer D_{n+1} en fonction de D_n. En déduire que la suite (D_n) est géométrique et préciser sa raison.
3. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, déterminer l'expression de D_n en fonction de n.
4. Déterminer une expression en fonction de n de la distance totale T_n parcourue au bout de n jours :

$$T_n = D_1 + D_2 + \ldots + D_n$$

5. Réaliser un tableau de valeurs de T_n avec le mode suite de sa calculatrice et en déduire le nombre de jours qu'il qu'il faudra au globe-trotter pour atteindre son objectif.

3 Suites arithmético-géométriques

Définition 6

Une suite **arithmético-géométrique** est une suite définie par la donnée de son premier terme u_0 et de la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ pour tour entier naturel n, où a et b sont des réels fixés.

Remarque 1

- Si $a = 0$ alors (u_n) est une suite constante.
- Si $a = 1$ alors (u_n) est une suite arithmétique de raison b.
- Si $b = 0$ alors (u_n) est une suite géométrique de raison a.

Thème 1 ***Thème modélisation par une suite arithmético-géométrique (1/2), exo résolu 15 p. 37***

Un magazine est vendu uniquement par abonnement. On a constaté que :

- il y a 1 800 nouveaux abonnés chaque année ;
- d'une année sur l'autre, 15 % des abonnés ne se réabonnent pas.

En 2008, il y avait 8 000 abonnés.

1. Justifier si u_n désigne le nombre de milliers d'abonnés en $(2008 + n)$, cette situation peut être modélisée par la suite arithmético-géométrique (u_n) définie par :

$$u_0 = 8 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 0,85u_n + 1,8.$$

2. Dans le graphique en Annexe, on a représenté les droites $\mathscr{D}$ et Δ d'équations respectives :

$$y = 0,85x + 1,8 \quad \text{et} \quad y = x$$

Construire les quatre premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses en appliquant l'algorithme suivant :

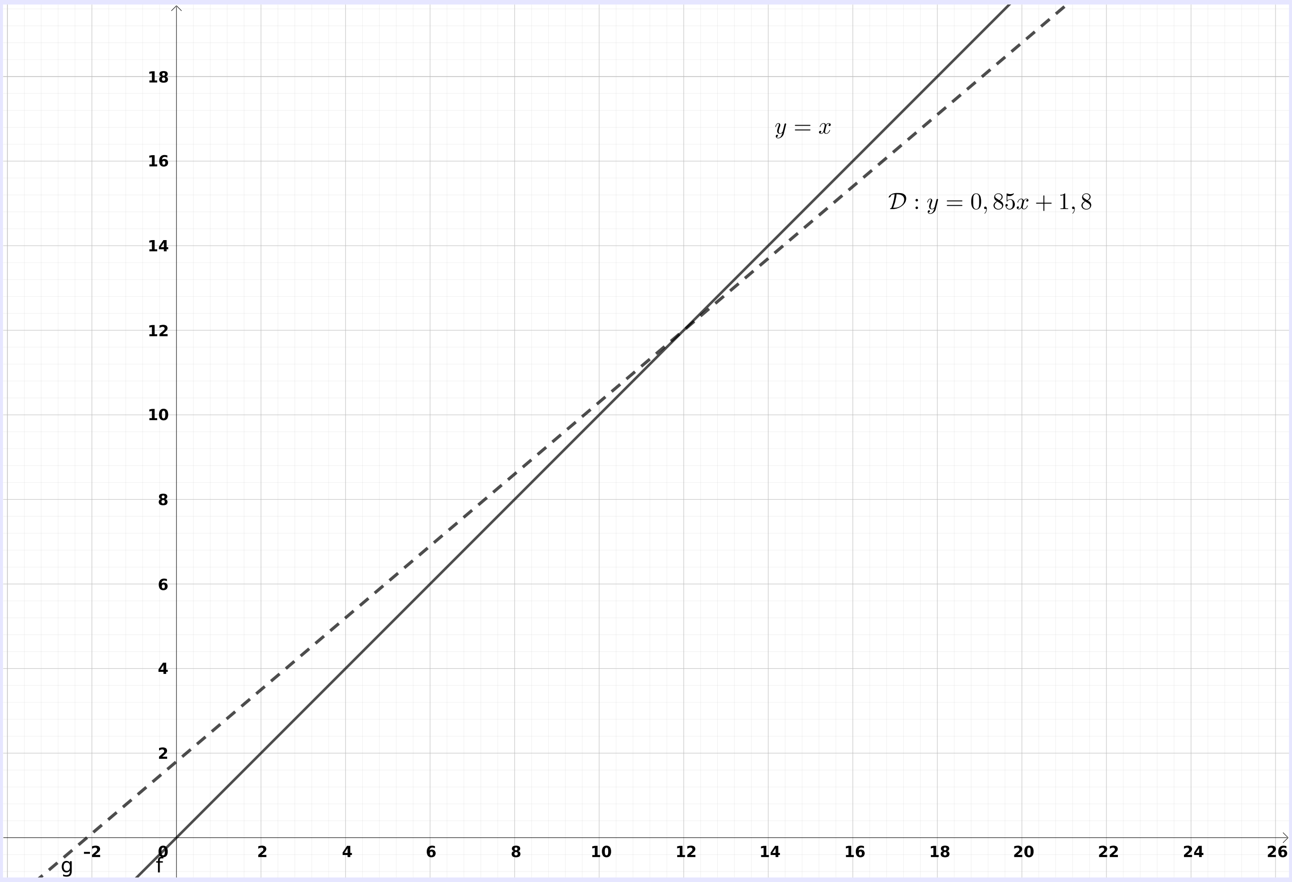
- Étape 1 : on place $u_0 = 8$ sur l'axe des abscisses ;
- Étape 2 : on construit l'ordonnée $u_1 = 0,85u_0 + 1,8$ du point de $\mathscr{D}$ d'abscisse u_0 sur l'axe des ordonnées et on le projette sur l'axe des abscisses en prenant l'abscisse du point de la droite Δ dont il est l'ordonnée, puis on reprend l'étape 1 avec u_1 ;

3. Calculer des valeurs approchées des dix premiers termes de la suite (u_n) avec le mode suite de sa calculatrice.

4. Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation de la suite (u_n) et les valeurs prises par u_n lorsque n devient très grand ?

En donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

Annexe



Propriété 7

Soit une suite arithmético-géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où a et b sont des constantes réelles, avec a différent de 1.

1. Il existe une unique constante réelle c vérifiant la relation de récurrence de la suite u c'est-à-dire telle que :
$$c = ac + b$$
2. La suite auxiliaire v définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - c$ est géométrique de raison a.

Démonstration

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Thème 2 ***Thème modélisation par une suite arithmético-géométrique (2/2), exo résolu 15 p. 37***

On poursuite l'étude du Thème 1 d'une suite u modélisant un nombre d'abonnements, définie par :

$$u_0 = 8 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 0,85u_n + 1,8.$$

1. Déterminer la constante c vérifiant la relation de récurrence de la suite u.
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - c$.
   - **a.** Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   - **b.** En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de v_n en fonction de n.
   - **c.** Démontrer que pour tout entier naturel n on a $u_n = 12 - 4 \times 0,85^n$.
   - **d.** Démontrer la conjecture faite dans le Thème 1 sur le sens de variation de la suite u.

Table des matières