

Corrigé détaillé – Primitives

Capacités du cours

Corrigé généré avec un outil d'IA générative, puis relu et corrigé.

Capacité 1 – Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle $y' = f$

1. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$.
 - a) La fonction F est définie sur \mathbb{R} par

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1.$$

Elle est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x ,

$$F'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 + 0 = x^2 = f(x).$$

Donc F est une primitive de f sur \mathbb{R} .

- b) Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante. Ainsi, toutes les primitives de f sur \mathbb{R} sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Par exemple, $x \mapsto \frac{1}{3}x^3$, $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + 2$ ou encore $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - 5$ sont des primitives de f .

2. On complète le tableau de primitives. Dans chaque cas, on peut ajouter une constante réelle C pour obtenir toutes les primitives.

Fonction f	Intervalle I	Une primitive F
$f(x) = 1$	\mathbb{R}	$F(x) = x$
$f(x) = x$	\mathbb{R}	$F(x) = \frac{1}{2}x^2$
$f(x) = 3x - 2$	\mathbb{R}	$F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x$
$f(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$	$]0; +\infty[$	$F(x) = \frac{1}{x} + \ln x$
$f(x) = e^x + e^{-x}$	\mathbb{R}	$F(x) = e^x - e^{-x}$

Par exemple, pour la quatrième ligne,

$$\left(\frac{1}{x} + \ln x\right)' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}.$$

Pour la dernière ligne,

$$(e^x - e^{-x})' = e^x + e^{-x}.$$

Capacité 2 – Vérifier qu'une fonction est une primitive d'une autre fonction

On considère la fonction f définie sur $[0; 4]$ par

$$f(x) = (3, 6x + 2, 4)e^{-0,6x} - 1, 4.$$

On considère aussi la fonction F définie par

$$F(x) = (-6x - 14)e^{-0,6x} - 1, 4x.$$

1. On vérifie que $F' = f$ sur $[0; 4]$.

Posons

$$u(x) = -6x - 14 \quad \text{et} \quad v(x) = e^{-0,6x}.$$

Alors

$$u'(x) = -6 \quad \text{et} \quad v'(x) = -0,6e^{-0,6x}.$$

En dérivant le produit $u(x)v(x)$, on obtient

$$\begin{aligned} F'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - 1,4 \\ &= -6e^{-0,6x} + (-6x - 14)(-0,6)e^{-0,6x} - 1,4 \\ &= (-6 + 3,6x + 8,4)e^{-0,6x} - 1,4 \\ &= (3,6x + 2,4)e^{-0,6x} - 1,4 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Donc F est une primitive de f sur $[0; 4]$.

2. Les solutions de l'équation différentielle $y' = f$ sur $[0; 4]$ sont les primitives de f , donc les fonctions de la forme

$$y(x) = (-6x - 14)e^{-0,6x} - 1,4x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

On impose la condition initiale $y(0) = 10$:

$$y(0) = (-14)e^0 - 0 + C = -14 + C.$$

On veut

$$-14 + C = 10,$$

donc

$$C = 24.$$

La solution cherchée est donc

$$\boxed{y(x) = (-6x - 14)e^{-0,6x} - 1,4x + 24.}$$

Capacité 3 – Échelle des dérivées

On raisonne à partir de la courbe de la fonction f .

1. Soit f' la dérivée de f et F une primitive de f sur \mathbb{R} .

— Proposition (A_1) : f' est positive sur $[2; 4]$.

Sur l'intervalle $[2; 4]$, la courbe de f descend : la fonction f est décroissante. Donc f' est négative ou nulle sur cet intervalle, et non positive au sens attendu ici.

La proposition (A_1) est donc fausse.

— Proposition (A_2) : f' est négative sur $[-4; 5; -4]$.

Sur l'intervalle $[-4; 5; -4]$, la fonction f est décroissante, ce qui signifie que f' y est négative.

La proposition (A_2) est vraie.

— Proposition (A_3) : F est décroissante sur $[2; 4]$.

Puisque F est une primitive de f , on a

$$F' = f.$$

La fonction F est décroissante là où $F' \leq 0$, c'est-à-dire là où $f \leq 0$.

Or, sur $[2; 4]$, la courbe de f est au-dessus de l'axe des abscisses : on a donc $f(x) > 0$.

Par conséquent, $F'(x) > 0$, donc F est strictement croissante sur $[2; 4]$.

La proposition (A_3) est donc fausse.

— Proposition (A_4) : F est décroissante sur $[-3; -1]$.

Comme $F' = f$, la fonction F est décroissante lorsque f est négative. Sur l'intervalle $[-3; -1]$, la courbe de f est située sous l'axe des abscisses : on a donc $f(x) < 0$.

Ainsi, $F'(x) < 0$ sur $[-3; -1]$, donc F est décroissante sur cet intervalle.

La proposition (A_4) est vraie.

Les bonnes réponses sont donc

$$\boxed{(A_2) \text{ et } (A_4)}.$$

2. On cherche la courbe de f'' .

La dérivée seconde f'' renseigne sur la convexité de f :

— lorsque $f'' > 0$, la courbe de f est convexe ;

— lorsque $f'' < 0$, la courbe de f est concave.

D'après la courbe de f , la fonction est convexe sur $] -\infty; 0]$, puis concave sur $[0; \approx 3, 5]$, puis de nouveau convexe. La fonction f'' doit donc être positive, négative, puis à nouveau positive.

Parmi les courbes proposées, c'est la courbe **d** qui possède ce comportement.

La bonne réponse est donc

$$\boxed{\text{courbe d.}}$$

Capacité 4 – Calculer une primitive en utilisant les primitives de référence

1. On détermine, pour chaque fonction, l'ensemble des primitives sur l'intervalle indiqué.

a) Pour $f(x) = 4$ sur \mathbb{R} :

$$\boxed{F(x) = 4x + C, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

b) Pour $f(x) = 0$ sur \mathbb{R} :

$$\boxed{F(x) = C, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

Une fonction constante a pour dérivée 0.

c) Pour $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}.$$

Donc

$$\boxed{F(x) = 2\sqrt{x} + C, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

En effet,

$$(2\sqrt{x})' = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

d) Pour $f(x) = 3 + x + x^4$ sur \mathbb{R} :

$$\boxed{F(x) = 3x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x^5 + C, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

e) Pour $f(x) = \frac{1}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$:

$$\frac{1}{x^2} = x^{-2}.$$

Donc

$$\boxed{F(x) = -\frac{1}{x} + C, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

f) Pour $f(x) = e^{-2x}$ sur \mathbb{R} :

$$F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

En effet,

$$\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)' = -\frac{1}{2} \times (-2)e^{-2x} = e^{-2x}.$$

g) Pour $f(x) = -\frac{1}{x}$ sur $] -\infty; 0[$:

$$F(x) = -\ln(-x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

En effet, sur $] -\infty; 0[$, on a $-x > 0$ et

$$(-\ln(-x))' = -\frac{-1}{-x} = -\frac{1}{x}.$$

On peut aussi écrire

$$F(x) = -\ln|x| + C.$$

2. On considère la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par

$$F(x) = x \ln x - x + 1.$$

Elle est dérivable sur $]0; +\infty[$. En utilisant la formule de dérivation d'un produit,

$$(x \ln x)' = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

Donc

$$F'(x) = \ln x + 1 - 1 + 0 = \ln x.$$

Ainsi, F est bien une primitive de la fonction \ln sur $]0; +\infty[$.

Toutes les primitives de \ln sur $]0; +\infty[$ sont les fonctions

$$x \mapsto x \ln x - x + 1 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

On cherche celle qui s'annule en \sqrt{e} .

On calcule d'abord

$$\ln(\sqrt{e}) = \ln(e^{1/2}) = \frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$F(\sqrt{e}) = \sqrt{e} \times \frac{1}{2} - \sqrt{e} + 1 = 1 - \frac{\sqrt{e}}{2}.$$

Pour que la primitive $G = F + C$ s'annule en \sqrt{e} , il faut

$$G(\sqrt{e}) = F(\sqrt{e}) + C = 0.$$

Donc

$$1 - \frac{\sqrt{e}}{2} + C = 0,$$

d'où

$$C = \frac{\sqrt{e}}{2} - 1.$$

La primitive cherchée est donc

$$G(x) = x \ln x - x + \frac{\sqrt{e}}{2}.$$

Capacité 5 – Calculer une primitive de fonction de la forme $(v' \circ u) \times u'$

Pour chaque fonction, on détermine l'ensemble des primitives sur l'intervalle indiqué.

a) Sur $]0; +\infty[$,

$$f(x) = x^2 - 2x - 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + e^x.$$

On intègre terme à terme :

- une primitive de $x \mapsto x^2$ est $x \mapsto \frac{x^3}{3}$
- une primitive de $x \mapsto -2x$ est $x \mapsto -x^2$
- une primitive de $x \mapsto -1$ est $x \mapsto -x$
- une primitive de $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ est $x \mapsto \frac{1}{x}$
- une primitive de $x \mapsto -\frac{1}{x}$ est $x \mapsto -\ln(x)$
- une primitive de $x \mapsto e^x$ est $x \mapsto e^x$

Les primitives de f sur $]0; +\infty[$ sont donc les fonctions F définies par :

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - x + \frac{1}{x} - \ln(x) + e^x + C \quad C \in \mathbb{R}$$

b) Sur \mathbb{R} ,

$$f(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

On pose

$$u(x) = e^x + 1.$$

Alors

$$u'(x) = e^x.$$

Ainsi,

$$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)^2}.$$

Une primitive de $\frac{u'}{u^2}$ est $-\frac{1}{u}$. Donc

$$F(x) = -\frac{1}{e^x + 1} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

c) Sur \mathbb{R} ,

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

On pose

$$u(x) = e^x + 1.$$

Alors $u'(x) = e^x$ et

$$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Comme $u(x) = e^x + 1 > 0$, une primitive est

$$F(x) = \ln(e^x + 1) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

d) Sur \mathbb{R} ,

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1}.$$

On pose

$$u(x) = e^{-x} + 1.$$

Alors

$$u'(x) = -e^{-x}.$$

Donc

$$f(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Comme $u(x) = e^{-x} + 1 > 0$, une primitive est

$$\boxed{F(x) = -\ln(e^{-x} + 1) + C, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

e) Sur \mathbb{R}_+^* ,

$$f(x) = \frac{x}{e^{x^2}} = xe^{-x^2}.$$

On pose

$$u(x) = -x^2.$$

Alors

$$u'(x) = -2x.$$

Ainsi,

$$xe^{-x^2} = -\frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}.$$

Une primitive est donc

$$\boxed{F(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

On peut aussi écrire

$$F(x) = -\frac{1}{2e^{x^2}} + C.$$

f) Sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$,

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x}.$$

On pose

$$u(x) = \ln x.$$

Alors

$$u'(x) = \frac{1}{x}.$$

Donc

$$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Une primitive sur chacun des deux intervalles $]0; 1[$ et $]1; +\infty[$ est donc

$$\ln |\ln x|.$$

Plus précisément :

$$\boxed{F(x) = \ln |\ln x| + C}$$

sur chacun des intervalles $]0; 1[$ et $]1; +\infty[$.

Comme $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ n'est pas un intervalle, les constantes peuvent être différentes sur les deux morceaux :

$$F(x) = \begin{cases} \ln(-\ln x) + C_1, & \text{si } 0 < x < 1, \\ \ln(\ln x) + C_2, & \text{si } x > 1, \end{cases} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$