

Dérivation – Corrigé détaillé de la fiche n° 2

Exercice 1 Étude de fonction

On considère $f(x) = (2x^2 - 3x - 18)e^{-x}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. **Intersection avec l'axe des ordonnées.** Sur l'axe des ordonnées, l'abscisse est nulle. Or

$$f(0) = (2 \times 0^2 - 3 \times 0 - 18)e^0 = -18.$$

Le point d'intersection a donc pour coordonnées $(0; -18)$.

2. **Intersections avec l'axe des abscisses.** Les points recherchés ont une ordonnée nulle. Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$; ainsi

$$f(x) = 0 \iff 2x^2 - 3x - 18 = 0.$$

Le discriminant de ce trinôme vaut

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-18) = 9 + 144 = 153 > 0.$$

L'équation possède donc deux solutions réelles distinctes. Par conséquent, $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en deux points distincts. Le calcul de leurs coordonnées n'est pas demandé.

3. **Calcul de la dérivée.** On pose $u(x) = 2x^2 - 3x - 18$ et $v(x) = e^{-x}$. Ces deux fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$u'(x) = 4x - 3, \quad v'(x) = -e^{-x}.$$

Puisque $f = uv$, la formule $(uv)' = u'v + uv'$ donne

$$\begin{aligned} f'(x) &= (4x - 3)e^{-x} + (2x^2 - 3x - 18)(-e^{-x}) \\ &= (4x - 3 - 2x^2 + 3x + 18)e^{-x} \\ &= (-2x^2 + 7x + 15)e^{-x}. \end{aligned}$$

Cette égalité est valable sur tout $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $[-5; 2]$.

4. **Signe de $t(x) = -2x^2 + 7x + 15$.** On calcule le discriminant :

$$\Delta = 7^2 - 4 \times (-2) \times 15 = 49 + 120 = 169 = 13^2.$$

Les deux racines sont

$$\frac{-7 + 13}{-4} = -\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-7 - 13}{-4} = 5.$$

Le coefficient de x^2 étant négatif, le trinôme est négatif à l'extérieur des racines et positif entre les racines. Il s'annule aux deux racines.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	5	$+\infty$	
$t(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

5. **Variations de f sur $\mathbb{R}$.** Comme $e^{-x} > 0$, $f'(x)$ a le même signe que $t(x)$. Ainsi, f est strictement décroissante sur $] -\infty; -\frac{3}{2}]$, strictement croissante sur $[-\frac{3}{2}; 5]$, puis strictement décroissante sur $[5; +\infty[$. Les valeurs aux points où la dérivée s'annule sont

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{3}{2}\right) &= \left(2 \times \frac{9}{4} + \frac{9}{2} - 18\right)e^{3/2} = -9e^{3/2}, \\ f(5) &= (50 - 15 - 18)e^{-5} = 17e^{-5}. \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	5	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	17e^{-5} $-9\text{e}^{3/2}$				

En particulier, f admet un minimum local en $-\frac{3}{2}$ et un maximum local en 5 . Le minimum est aussi le minimum global de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 Fonction paire

On considère $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x , $1+x^2 \geq 1 > 0$: le dénominateur est donc bien défini et non nul.

1. **Parité de g .** Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(-x) = \frac{1}{\sqrt{1+(-x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = g(x).$$

Le domaine $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à zéro : g est paire.

2. **Conséquence graphique.** Puisque g est paire, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. En effet, les points $(x; g(x))$ et $(-x; g(x))$ appartiennent tous deux à la courbe.

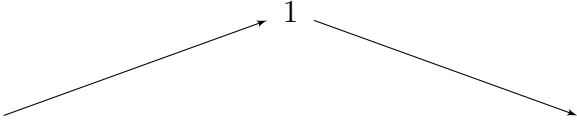
3. **Calcul de la dérivée.** On écrit $g = \frac{u}{v}$, avec

$$u(x) = 1, \quad u'(x) = 0, \quad v(x) = \sqrt{1+x^2}, \quad v'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Pour calculer v' , on a utilisé la formule $(\sqrt{w})' = \frac{w'}{2\sqrt{w}}$ avec $w(x) = 1+x^2 > 0$ et $w'(x) = 2x$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et v ne s'annule pas. La formule de dérivation d'un quotient donne donc

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{0 \times \sqrt{1+x^2} - 1 \times \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \\ &= \boxed{\frac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}}. \end{aligned}$$

4. **Variations de g .** Le dénominateur $(1+x^2)\sqrt{1+x^2}$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$. Le signe de $g'(x)$ est donc celui de $-x$: positif pour $x < 0$, nul pour $x = 0$ et négatif pour $x > 0$. Ainsi, g est strictement croissante sur $] -\infty; 0]$, puis strictement décroissante sur $[0; +\infty[$. On a $g(0) = 1$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$			

Le maximum de g sur $\mathbb{R}$ vaut donc $\boxed{1}$, atteint uniquement pour $x = 0$.

Exercice 3 Courbe de la dérivée

1. **Tangente au point d'abscisse -1 .** Sur la courbe représentant f' , le point d'abscisse -1 a pour ordonnée 0 . On lit donc $f'(-1) = 0$. Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Avec $a = -1$ et $f(-1) = 701$, on obtient

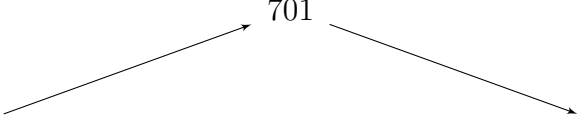
$$y = 0 \times (x + 1) + 701, \quad \boxed{y = 701}.$$

Il s'agit d'une tangente horizontale.

2. **Tableau de variations de f sur $] -2 ; 4[$.** Sur le graphique, la courbe de f' est au-dessus de l'axe des abscisses pour $-2 < x < -1$; elle coupe cet axe en $x = -1$, puis reste au-dessous pour $-1 < x < 4$. On conjecture donc :

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{sur }] -2 ; -1[, \\ f'(-1) = 0, \\ f'(x) < 0 & \text{sur }] -1 ; 4[. \end{cases}$$

Ainsi, f est strictement croissante sur $] -2 ; -1]$, puis strictement décroissante sur $[-1 ; 4[$.

x	-2	-1	4
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$			

La fonction f admet donc un maximum sur $] -2 ; 4[$, égal à $\boxed{701}$ et atteint uniquement en $x = -1$. Les bornes -2 et 4 sont exclues du domaine ; aucune valeur ni limite à ces bornes n'est donnée dans l'énoncé.

Attention : entre 0 et 4 , la courbe de f' remonte mais reste sous l'axe des abscisses. Cela signifie que f' augmente tout en restant négative : la fonction f continue donc de décroître.

Exercice 4 Courbe d'une primitive

1. a) **Valeur de $f'(1)$.** La tangente au point C d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses : son coefficient directeur est nul. Donc $\boxed{f'(1) = 0}$.
 b) **Résolution de $f(x) = 0$ sur $[0; 3]$.** Les solutions sont les abscisses des points où la courbe $\mathcal{C}_f$ rencontre l'axe des abscisses. Sur l'intervalle $[0; 3]$, le graphique montre une seule intersection, au point A $(\frac{1}{2}; 0)$. L'unique solution lue graphiquement est donc $\boxed{x = \frac{1}{2}}$.
 2. **Valeur de $f'(\frac{1}{2})$.** La tangente T_A passe par A $(\frac{1}{2}; 0)$ et B $(1; e^2)$. Son coefficient directeur vaut donc

$$f'(\frac{1}{2}) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{e^2 - 0}{1 - \frac{1}{2}} = \boxed{2e^2}.$$

3. **Choix des courbes de primitives.** Une fonction F est une primitive de f si $F' = f$. Il faut donc utiliser le *signe de f* pour déterminer les variations de F . Sur le graphique de f , on lit que f est négative avant $\frac{1}{2}$, s'annule en $\frac{1}{2}$, puis est positive après $\frac{1}{2}$, sur la portion représentée. En particulier, sur $[0; 3]$, toute primitive F présente les variations suivantes, en notant $m = F(\frac{1}{2})$:

x	0	$\frac{1}{2}$	3
$F'(x) = f(x)$	–	0	+
$F(x)$	$F(0)$	m	$F(3)$

La courbe d'une primitive doit donc décroître jusqu'à $x = \frac{1}{2}$, puis croître, avec une tangente horizontale et un minimum en $x = \frac{1}{2}$.

Les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont bien ces propriétés. En revanche, la courbe $\mathcal{C}_3$ continue de décroître après $x = \frac{1}{2}$ et atteint son minimum à une abscisse supérieure à $\frac{1}{2}$. Sur une partie de cet intervalle, sa pente est négative alors que f est positive : elle ne peut donc pas représenter une primitive de f .

L'énoncé précise que deux des trois courbes représentent des primitives de f . Les deux courbes à retenir sont par conséquent

$$\boxed{\mathcal{C}_1 \text{ et } \mathcal{C}_2}.$$

On constate aussi qu'elles se déduisent l'une de l'autre par une translation verticale. C'est cohérent avec la propriété suivante : deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante. En effet, si $F'_1 = F'_2 = f$, alors $(F_1 - F_2)' = 0$, donc $F_1 - F_2$ est constante.

Remarque : les seules variations ne suffiraient pas à prouver qu'une fonction est une primitive de f ; ici, le choix est assuré par l'indication de l'énoncé selon laquelle exactement deux courbes conviennent.