



Compléments sur la dérivation exercices fiche 1 (Correction)

MathsComp

Corrigé de l'exercice 1

$f'(0)$ est donné par le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0, soit **-2**.

Corrigé de l'exercice 2

L'équation réduite de la tangente (T) au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

On obtient pour $a = -1$:

$$y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)$$

D'après l'énoncé, $f'(-1) = -5$ et $f(-1) = -4$, on a alors :

$$y = -5(x + 1) - 4$$

En simplifiant l'écriture, on obtient : $(T) : \mathbf{y = -5x - 9}$.

Corrigé de l'exercice 3

L'équation réduite de la tangente (T) au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

La fonction f est un polynôme, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

• Calcul de $f'(x)$:

$$f'(x) = -3x^2 + 6x$$

• Calcul de $f'(1)$:

$$f'(1) = -3 \times 1^2 + 6 \times 1 = 3$$

• Calcul de $f(1)$:

$$f(1) = -1^3 + 3 \times 1^2 - 4 = -2$$

En remplaçant les valeurs dans cette équation, on obtient :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$y = 3(x - 1) - 2$$

En simplifiant l'écriture, on obtient : $(T) : \mathbf{y = 3x - 5}$.

Corrigé de l'exercice 4

1. On rappelle le cours : si u, v sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I alors leur produit est dérivable sur I et on a la formule :

$$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'.$$

Ici $f = u \times v$ avec :

$$u(x) = \sqrt{x}$$

$$v(x) = -2x - 9.$$

On utilise la formule rappelée plus haut et on a

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{u'(x)} \times (-2x - 9) + \sqrt{x} \times \underbrace{(-2)}_{v'(x)}.$$

L'énoncé ne demandant rien de plus, on se contente de simplifier l'expression :

$$f'(x) = \frac{-2x - 9}{2\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}.$$



2. On rappelle le cours : si u, v sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I alors leur produit est dérivable sur I et on a la formule :

$$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'.$$

Ici $g = u \times v$ avec :

$$u(x) = -3x^2$$

$$v(x) = \sqrt{x}.$$

On applique la formule rappelée plus haut :

$$g'(x) = \underbrace{-6x}_{u'(x)} \times \sqrt{x} + (-3x^2) \times \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{v'(x)}.$$

On peut réduire un peu l'expression :

$$g'(x) = -6x\sqrt{x} - \frac{3x^2}{2\sqrt{x}}.$$

3. On rappelle le cours : si u, v sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I alors leur produit est dérivable sur I et on a la formule :

$$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'.$$

Ici $h = u \times v$ avec :

$$u(x) = \sqrt{x}$$

$$v(x) = 9 - 7x^2.$$

On utilise la formule rappelée plus haut et on a

$$h'(x) = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{u'(x)} \times (-7x^2 + 9) + \sqrt{x} \times \underbrace{(-14x)}_{v'(x)}.$$

L'énoncé ne demandant rien de plus, on se contente de simplifier l'expression :

$$h'(x) = \frac{-7x^2 + 9}{2\sqrt{x}} - 14x\sqrt{x}.$$

Corrigé de l'exercice 5



1. On rappelle le cours : si u, v sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I , et que v ne s'annule pas sur I alors leur quotient est dérivable sur I et on a la formule :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}.$$

Ici $f = \frac{u}{v}$ avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= x^6, & u'(x) &= 6x^5 \\ v(x) &= 2x^2 - 6, & v'(x) &= 4x. \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$f'(x) = \frac{6x^5(2x^2 - 6) - x^6 \times 4x}{(2x^2 - 6)^2}.$$

D'où, en développant le numérateur :

$$f'(x) = \frac{12x^7 - 36x^5 - 4x^7}{(2x^2 - 6)^2}.$$

On simplifie pour obtenir : $f'(x) = \frac{8x^7 - 36x^5}{(2x^2 - 6)^2}$.

Remarque : la plupart du temps, on veut le signe de la dérivée. Il serait donc plus logique de factoriser le numérateur, mais cela sort du cadre de cet exercice.

2. On rappelle le cours : si u, v sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I , et que v ne s'annule pas sur I alors leur quotient est dérivable sur I et on a la formule :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}.$$

Ici $g = \frac{u}{v}$ avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= x^9, & u'(x) &= 9x^8 \\ v(x) &= 2 - 10x, & v'(x) &= -10. \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$g'(x) = \frac{9x^8(-10x + 2) - x^9 \times (-10)}{(2 - 10x)^2}.$$

D'où, en développant le numérateur :

$$g'(x) = \frac{-90x^9 + 18x^8 + 10x^9}{(2 - 10x)^2}.$$

On simplifie pour obtenir : $g'(x) = \frac{-80x^9 + 18x^8}{(2 - 10x)^2}$.

Remarque : la plupart du temps, on veut le signe de la dérivée. Il serait donc plus logique de factoriser le numérateur, mais cela sort du cadre de cet exercice.



3. On rappelle le cours : si u, v sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I , et que v ne s'annule pas sur I alors leur quotient est dérivable sur I et on a la formule :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}.$$

Ici $h = \frac{u}{v}$ avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= 5x^2 + 5x - 2, \quad u'(x) = 10x + 5 \\ v(x) &= 7x - 8, \quad v'(x) = 7. \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$h'(x) = \frac{(10x + 5)(7x - 8) - (5x^2 + 5x - 2) \times 7}{(7x - 8)^2}.$$

D'où, en développant le numérateur :

$$h'(x) = \frac{70x^2 - 45x - 40 - (35x^2 + 35x - 14)}{(7x - 8)^2}.$$

On réduit le numérateur pour obtenir : $h'(x) = \frac{35x^2 - 80x - 26}{(7x - 8)^2}$.

Remarque : la plupart du temps, on veut le signe de la dérivée. Il serait donc plus logique de factoriser le numérateur si possible, mais cela sort du cadre de cet exercice.

4. On rappelle le cours : si u, v sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I , et que v ne s'annule pas sur I alors leur quotient est dérivable sur I et on a la formule :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}.$$

Ici $l = \frac{u}{v}$ avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= 9x + 1, \quad u'(x) = 9 \\ v(x) &= 6x - 5, \quad v'(x) = 6. \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$l'(x) = \frac{9(6x - 5) - (9x + 1) \times 6}{(6x - 5)^2}.$$

D'où, en développant le numérateur :

$$l'(x) = \frac{54x - 45 - (54x + 6)}{(6x - 5)^2}.$$

Les termes en x se compensent et on obtient :

$$l'(x) = \frac{-45 - 6}{(6x - 5)^2}.$$

C'est-à-dire : $l'(x) = \frac{-51}{(6x - 5)^2}$.

**Corrigé de l'exercice 6**

1. On rappelle le cours. Si x est un nombre réel tel que u soit dérivable en $ax + b$, alors $v : x \mapsto u(ax + b)$ est dérivable en x et on a :

$$v'(x) = a \times u'(ax + b).$$

Ici :

$$u(x) = \sqrt{x}$$

$$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$a = -7$$

$$b = -6.$$

Soit x un réel de l'ensemble de dérivabilité de f . On a, en appliquant la formule ci-dessus :

$$f'(x) = -7 \times \frac{1}{2\sqrt{-7x-6}}.$$

D'où, en simplifiant :

$$f'(x) = \frac{-7}{2\sqrt{-7x-6}}.$$

2. On rappelle le cours. Si x est un nombre réel tel que u soit dérivable en $ax + b$, alors $v : x \mapsto u(ax + b)$ est dérivable en x et on a :

$$v'(x) = a \times u'(ax + b).$$

Ici :

$$u(x) = x^5$$

$$u'(x) = 5x^4$$

$$a = 8$$

$$b = 10.$$

Soit x un réel de l'ensemble de dérivabilité de g . On a, en appliquant la formule ci-dessus :

$$g'(x) = 8 \times 5(8x + 10)^4.$$

D'où, en simplifiant :

$$g'(x) = 40(8x + 10)^4.$$



3. On rappelle le cours. Si x est un nombre réel tel que u soit dérivable en $ax + b$, alors $v : x \mapsto u(ax + b)$ est dérivable en x et on a :

$$v'(x) = a \times u'(ax + b).$$

Ici :

$$u(x) = e^x$$

$$u'(x) = e^x$$

$$a = 5$$

$$b = 10.$$

Soit x un réel de l'ensemble de dérivabilité de h . On a, en appliquant la formule ci-dessus :

$$h'(x) = 5e^{5x+10}.$$

4. On rappelle le cours. Si x est un nombre réel tel que u soit dérivable en $ax + b$, alors $v : x \mapsto u(ax + b)$ est dérivable en x et on a :

$$v'(x) = a \times u'(ax + b).$$

Ici :

$$u(x) = \sqrt{x}$$

$$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$a = -3$$

$$b = 10.$$

Soit x un réel de l'ensemble de dérivabilité de i . On a, en appliquant la formule ci-dessus :

$$i'(x) = -3 \times \frac{1}{2\sqrt{-3x+10}}.$$

D'où, en simplifiant :

$$i'(x) = \frac{-3}{2\sqrt{-3x+10}}.$$



5. On rappelle le cours. Si x est un nombre réel tel que u soit dérivable en $ax + b$, alors $v : x \mapsto u(ax + b)$ est dérivable en x et on a :

$$v'(x) = a \times u'(ax + b).$$

Ici :

$$\begin{aligned}u(x) &= \frac{1}{x} \\u'(x) &= \frac{-1}{x^2} \\a &= 8 \\b &= -3.\end{aligned}$$

Soit x un réel de l'ensemble de dérivabilité de j . On a, en appliquant la formule ci-dessus :

$$j'(x) = 8 \times \frac{-1}{(8x - 3)^2}.$$

D'où, en simplifiant :

$$j'(x) = \frac{-8}{(8x - 3)^2}$$

.