

Source : <https://www.apmep.fr/Epreuve-anticipée-2026>

Exercice 1 Épreuve anticipée 2026 Centres-Étrangers

Un maire souhaite végétaliser sa ville.

Pour cela, il décide de planter des mûriers platanes dans les différents parcs.

Ces arbres sont réputés pour leurs qualités d'ombrage et de résistance à la sécheresse.

Partie A

Au moment de la plantation, un mûrier platane mesure 1 mètre.

On suppose que, chaque année, la hauteur de l'arbre augmente de 40 cm.

Pour tout entier naturel n , on note u_n la hauteur de l'arbre, en mètres, n années après sa plantation. Ainsi $u_0 = 1$.

1.
 - a. Calculer u_1 .
 - b. Quelle sera la hauteur de l'arbre deux années après sa plantation?
2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier.
3. Pour tout entier naturel n , exprimer u_n en fonction de n .
4. Au bout de combien d'années le mûrier atteindra-t-il 9 mètres de haut?

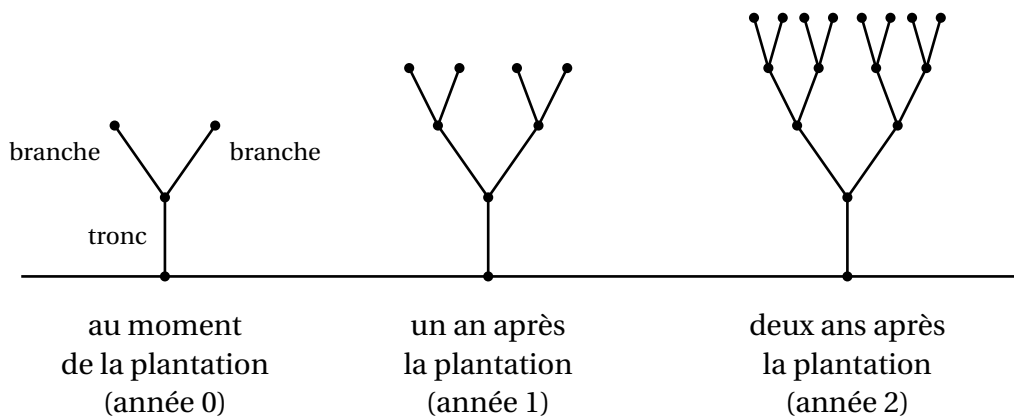
Partie B

Au moment de la plantation, l'arbre possède un tronc et deux branches.

Un an après la plantation, on observe 4 nouvelles branches.

Deux ans après la plantation, on observe 8 nouvelles branches.

Chaque année, le nombre de nouvelles branches double comme représenté sur le schéma ci-dessous :



Pour tout entier naturel n , on note v_n le nombre de nouvelles branches n années après la plantation.

À la plantation, l'arbre possède 2 branches, ainsi on pose $v_0 = 2$.

1. Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Justifier.
2.
 - a. Un an après la plantation, l'arbre a produit 4 nouvelles branches.
Il possède alors un nombre total de branches égal à 6.
Montrer que, trois ans après sa plantation, l'arbre possède un nombre total de branches égal à 30.

b. On donne le programme ci-contre écrit en langage Python :

Rappel : for i in range(n) permet de répéter n fois un ensemble d'instructions.

La valeur affichée par ce programme est 4 094.

Dans le contexte de l'exercice, que représente la valeur 4 094 affichée par ce programme ?

```
v = 2
total = 2
for i in range(10):
    v = 2 * v
    total = total + v
print(total)
```

Exercice 2

En 2022, le vélo-club d'une petite ville compte 224 adhérents. On suppose que chaque année le vélo-club compte 5 adhérents supplémentaires. Pour tout entier naturel n on note u_n le nombre d'adhérents de ce club en l'année $2022 + n$. Ainsi $u_0 = 224$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . Quelle est la nature de la suite u ?
3.
 - a. Donner une expression explicite de u_n en fonction de n pour n entier naturel.
 - b. Déterminer le nombre d'adhérents prévu par ce modèle en 2035.
 - c. Selon ce modèle, en quelle année le nombre d'adhérents dépassera-t-il 400 ?

Exercice 3

Victor sort un plat du four. La température du plat est alors égale à 180°C . Il place ce plat dans une pièce dont la température est égale à 25°C . Le plat refroidit. On dispose des données suivantes :

- la température de la pièce est égale à 25°C .
- la température du plat à la sortie du four est égale à 180°C .
- la température du plat, 3 minutes après la sortie du four, est égale à 105°C .

Le plat ne pourra être servi que lorsque sa température sera devenue inférieure ou égale à 40°C .

Pour tout entier naturel n on note u_n , la différence entre la température du plat et la température de la pièce, n minutes après la sortie du four.

Exemple : 3 minutes après la sortie du four, l'écart avec la température de la pièce est égal à $105 - 25 = 80$. On a donc $u_3 = 80$.

1. Justifier que $u_0 = 155$.

On suppose que chaque minute la différence u_n diminue de 20 %.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = 0,8u_n$.
3. En déduire la nature de la suite (u_n) et donner sa raison.
4. Exprimer u_n en fonction de n , pour tout entier naturel n .
5. On dispose des données suivantes :

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
u_n ar- rondi à 10^{-1}	80	64	51,2	41	32,8	26,2	21	16,8	13,4	10,7	8,6	6,9	5,5

Au bout de combien de minutes, Victor pourra-t-il servir le plat?

Exercice 4

En 2020, Laurence, souhaitant se lancer dans l'agriculture biologique, a acheté une ferme de 14 hectares de pommiers.

Elle estime qu'il y a 300 pommiers par hectare. Chaque année, Laurence élimine 4 % des pommiers existants et replantera 22 nouveaux pommiers par hectare.

Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre de pommiers par hectare l'année 2020 + n .

On a ainsi $u_0 = 300$.

1.
 - a. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = 0,96u_n + 22$.
 - b. Estimer le nombre de pommiers par hectare, arrondi à l'unité, en 2021.
2. On définit la suite (v_n) en posant $v_n = u_n - 550$ pour tout entier naturel n .
 - a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,96 dont on précisera le premier terme v_0 .
 - b. Pour tout entier naturel n , exprimer v_n en fonction de n puis démontrer que :

$$u_n = 550 - 250 \times 0,96^n.$$

- c. Estimer le nombre de pommiers de l'exploitation de Laurence en 2030. Arrondir à l'entier le plus proche.

Exercice 5

Soit la suite v définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 280 \\ v_{n+1} = 0,9v_n + 42 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Calculer les valeurs exactes de v_1 et v_2 .
2. Déterminer la constante c telle que $c = 0,9c + 42$.
3. On considère la suite auxiliaire u définir pour tout entier naturel n par $u_n = v_n - c$.
 - a. Calculer u_0 .
 - b. Démontrer que la suite u est géométrique de raison 0,9.
 - c. Donner une expression explicite de u_n en fonction de n .
 - d. En déduire que pour tout entier naturel n , on a $v_n = 420 - 140 \times 0,9^n$.
4. Déterminer avec la calculatrice le plus petit entier naturel n tel que $v_n > 419$.

5. Existe-t-il un entier n tel que $v_n \geq 420$?
6. Conjecturer la limite de la suite v .

Exercice 6

Corrigé : https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Corrige_ES_Polynesie_sept_2020_DV_2.pdf

Au 31 décembre 2017, un magazine possède 450 000 abonnés. On note que chaque année, seuls 80 % des abonnés de l'année précédente renouvellent leur abonnement auxquels viennent s'ajouter 180 000 nouveaux abonnés.

On note (u_n) une suite modélisant le nombre d'abonnés, exprimé en millier, au 31 décembre de l'année $(2017 + n)$. On a donc $u_0 = 450$.

1. Calculer, selon ce modèle, le nombre d'abonnés au 31 décembre 2018.
2. Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,8u_n + 180$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - 900$.
 - a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,8. Préciser son premier terme.
 - b. Soit n un entier naturel. Exprimer v_n en fonction de n .
 - c. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n = -450 \times 0,8^n + 900$.
4. La direction du magazine affirme qu'à long terme, le nombre d'abonnés dépassera 900 000. Que penser de cette affirmation? Justifier la réponse.
5. En s'appuyant sur ce modèle, au 31 décembre de quelle année le nombre d'abonnés dépassera-t-il 800 000 pour la première fois?

Corrigés

Exercice 1 (corrigé rédigé par un collègue de l'APMEP)

Partie A

1. a. On connaît $u_0 = 1$ et on nous dit que chaque année la hauteur de l'arbre augmente de 40 cm, soit de 0,4 m.

Au bout d'un an après sa plantation, on a donc : $u_1 = u_0 + 0,4 = 1 + 0,4 = 1,4$.

- b. De même, la hauteur de l'arbre deux années après sa plantation correspond à :

$$u_2 = u_1 + 0,4 = 1,4 + 0,4 = 1,8.$$

Deux années après sa plantation, l'arbre mesure donc 1,8 m.

2. La phrase « chaque année, la hauteur de l'arbre augmente de 40 cm » se traduit mathématiquement par une relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 0,4$.

Cette relation de récurrence est celle d'une suite arithmétique, de premier terme : $u_0 = 1$ et de raison $r = 0,4$.

3. La suite étant arithmétique, par propriété, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr = 1 + n \times 0,4 = 0,4n + 1.$$

4. Pour savoir au bout de combien d'années le mûrier atteint 9 mètres de haut, on résout :

$$u_n = 9 \iff 0,4n + 1 = 9$$

$$\iff 0,4n = 8$$

$$\iff n = \frac{8}{0,4}$$

$$\iff n = \frac{80}{4}$$

$$\iff n = 20$$

On aura donc $u_{20} = 9$: c'est 20 ans après sa plantation que le mûrier platane aura une hauteur de 9 mètres.

Partie B

1. « Chaque année, le nombre de nouvelles branches double » se traduit mathématiquement par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 2 \times v_n$

C'est la relation de récurrence d'une suite géométrique, de premier terme $v_0 = 2$ et de raison $q = 2$.

2. a. Un an après la plantation, l'arbre a produit 4 nouvelles branches, donc l'année suivante, il produit $4 \times 2 = 8$ nouvelles branches.

Au bout d'un an, le nombre total de branches est égal à 6, donc l'année d'après, en ajoutant les 8 nouvelles branches, on aura : $6 + 8 = 14$ branches en tout.

Trois ans après sa plantation, l'arbre produit donc : $8 \times 2 = 16$ nouvelles branches.

Cela porte son nombre total de branches à : $14 + 16 = 30$ branches.

On retrouve bien la valeur annoncée.

- b. Dans le programme donné, la variable v est initialisée à 2, et, quand elle est modifiée, c'est pour être doublée : elle va donc stocker les valeurs successives des termes de (v_n) , le nombre de nouvelles branches.

La variable `total` va stocker le nombre total de branches : initialisée à 2 (au moment de la plantation), puis actualisée en ajoutant le nombre de nouvelles branches.

La boucle `for` va exécuter 10 fois ces relations de récurrence, donc cela correspond à 10 années après la plantation.

La valeur affichée par le programme est le contenu de la variable `total`, donc 4 094 est le nombre total de branches du mûrier platane, 10 ans après la plantation.

Correction de l'exercice 4

En 2020, Laurence, souhaitant se lancer dans l'agriculture biologique, a acheté une ferme de 14 hectares de pommiers.

Elle estime qu'il y a 300 pommiers par hectare. Chaque année, Laurence élimine 4 % des pommiers existants et replantera 22 nouveaux pommiers par hectare.

Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre de pommiers par hectare l'année 2020 + n .

On a ainsi $u_0 = 300$.

1.
 - a. Si u_n est le nombre de pommiers par hectare à l'année n , en éliminant 4 % des pommiers, il en reste $(1 - 0,04) \times u_n = 0,96u_n$. Laurence en replante ensuite 22 ce qui donne $0,96u_n + 22$. Ainsi l'année suivante on aura $u_{n+1} = 0,96u_n + 22$ pommiers par hectare.
 - b. En 2021 on aura $u_1 = 0,96u_0 + 22 = 0,96 \times 300 + 22 = 288 + 22 = 310$ pommiers par hectare.
2. On définit la suite (v_n) en posant $v_n = u_n - 550$ pour tout entier naturel n .
 - a. Démontrons que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,96.
Pour tout entier naturel n , on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 550$$

$$v_{n+1} = 0,96u_n + 22 - 550$$

$$v_{n+1} = 0,96u_n - 528$$

$$v_{n+1} = 0,96 \left(u_n - \frac{528}{0,96} \right)$$

$$v_{n+1} = 0,96(u_n - 550)$$

$$v_{n+1} = 0,96v_n$$

On en déduit que la suite v est géométrique de raison 0,96. De plus son premier terme est $v_0 = u_0 - 550 = 300 - 550 = -250$.

- b. Par propriété des suites géométriques, on a pour tout entier naturel n :

$$v_n = v_0 \times 0,96^n = -250 \times 0,96^n$$

On en déduit que pour tout entier naturel n :

$$u_n = v_n + 550 = -250 \times 0,96^n + 550$$

- c. Le nombre de pommiers de l'exploitation de Laurence en 2030 sera donné par le produit de u_{10} ($10 = 2030 - 2020$) estimation du nombre de pommiers à l'hectare par 14 la mesure de l'aire de son exploitation en hectares. Ce sera donc :

$$u_{10} \times 14 = (-250 \times 0,96^{10} + 550) \times 14 \approx 5373 \text{ pommiers}$$

Corrigés des exercices 5 et 6 générés par IA puis relus

Exercice 5

On considère la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 280, \\ v_{n+1} = 0,9v_n + 42 \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Calcul des premières valeurs

On a :

$$v_1 = 0,9v_0 + 42 = 0,9 \times 280 + 42 = 252 + 42 = 294.$$

Puis :

$$v_2 = 0,9v_1 + 42 = 0,9 \times 294 + 42 = 264,6 + 42 = 306,6.$$

2. Détermination de la constante c

On cherche c tel que :

$$c = 0,9c + 42.$$

On obtient :

$$c - 0,9c = 42 \iff 0,1c = 42 \iff c = 420.$$

3. Étude de la suite auxiliaire (u_n)

On définit $u_n = v_n - c = v_n - 420$.

a. Calcul de u_0 .

$$u_0 = v_0 - 420 = 280 - 420 = -140.$$

b. Mise en évidence d'une suite géométrique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = v_{n+1} - 420 = (0,9v_n + 42) - 420.$$

Or $42 - 420 = -378$, donc :

$$u_{n+1} = 0,9v_n - 378.$$

On exprime $v_n = u_n + 420$, donc :

$$u_{n+1} = 0,9(u_n + 420) - 378 = 0,9u_n + 378 - 378 = 0,9u_n.$$

Ainsi (u_n) est une suite géométrique de raison 0,9.

c. Expression explicite de u_n . La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = -140$ et de raison 0,9, donc :

$$u_n = u_0 \times (0,9)^n = -140 \times (0,9)^n.$$

d. Expression explicite de v_n . Comme $v_n = u_n + 420$, on obtient :

$$v_n = -140 \times (0,9)^n + 420.$$

4. Recherche du plus petit n tel que $v_n > 419$

On cherche n tel que :

$$-140 \times (0,9)^n + 420 > 419.$$

Cela équivaut à :

$$-140 \times (0,9)^n > -1.$$

En divisant par -140 (nombre négatif), l'inégalité s'inverse :

$$(0,9)^n < \frac{1}{140}.$$

Or $(0,9)^n$ décroît vers 0. On utilise la calculatrice :

$$(0,9)^{57} \approx 0,0023 \quad \text{et} \quad (0,9)^{58} \approx 0,0021.$$

Comme $\frac{1}{140} \approx 0,0071$, on voit que dès $n = 57$, l'inégalité est vérifiée. Ainsi, le plus petit entier est $n = 57$.

5. Existence d'un entier n tel que $v_n \geq 420$

On a pour tout n :

$$v_n = -140 \times (0,9)^n + 420.$$

Comme $(0,9)^n > 0$ pour tout n , on a $-140 \times (0,9)^n < 0$. Donc :

$$v_n < 420 \quad \text{pour tout } n.$$

Ainsi, il n'existe aucun entier n tel que $v_n \geq 420$.

6. Limite de la suite (v_n)

On peut conjecturer que $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 420$.

Dans un prochain chapitre, on le démontrera ainsi :

$\lim_{n \rightarrow \infty} (0,9)^n = 0$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-140 \times (0,9)^n + 420) = 0 + 420 = 420.$$

Exercice 6

On considère un magazine possédant 450 000 abonnés au 31 décembre 2017. On note u_n (en milliers) le nombre d'abonnés au 31 décembre de l'année 2017 + n , avec $u_0 = 450$.

1. Nombre d'abonnés au 31 décembre 2018

$$u_1 = 0,8u_0 + 180 = 0,8 \times 450 + 180 = 360 + 180 = 540.$$

Donc le nombre d'abonnés est 540 000.

2. Relation de récurrence

Chaque année, 80% des abonnés restent et on ajoute 180 000 nouveaux abonnés, soit 180 milliers. Ainsi :

$$u_{n+1} = 0,8u_n + 180 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

3. Étude de la suite (v_n)

On définit $v_n = u_n - 900$.

a. Mise en évidence d'une suite géométrique.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 900 = (0,8u_n + 180) - 900 = 0,8u_n - 720.$$

Or $u_n = v_n + 900$, donc :

$$v_{n+1} = 0,8(v_n + 900) - 720 = 0,8v_n + 720 - 720 = 0,8v_n.$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison 0,8. Son premier terme est :

$$v_0 = u_0 - 900 = 450 - 900 = -450.$$

b. Expression de v_n . Comme (v_n) est géométrique de premier terme -450 et de raison 0,8, on a :

$$v_n = -450 \times (0,8)^n.$$

c. Expression de u_n . Comme $u_n = v_n + 900$, on obtient :

$$u_n = -450 \times (0,8)^n + 900.$$

4. Analyse de l'affirmation de la direction

Pour tout entier naturel n on a $u_n = -450 \times (0,8)^n + 900$.

Or on a $-450 \times (0,8)^n < 0$ donc $-450 \times (0,8)^n + 900 < 900$ donc $u_n < 900$.

L'affirmation de la direction que le nombre d'abonnés dépassera 900 000 à long terme est donc fausse.

5. Première année où les abonnés dépassent 800 000

On cherche n tel que :

$$u_n > 800 \iff -450 \times (0,8)^n + 900 > 800.$$

Cela revient à :

$$-450 \times (0,8)^n > -100.$$

En divisant par -450 (nombre négatif), on inverse l'inégalité :

$$(0,8)^n < \frac{100}{450} = \frac{2}{9} \approx 0,2222.$$

Or, $(0,8)^9 \approx 0,134$ et $(0,8)^8 \approx 0,168$. Dès $n = 8$, la condition est vérifiée.

Ainsi, au 31 décembre $2017 + 8 = 2025$, le nombre d'abonnés dépassera 800 000 pour la première fois.