Exercice 1 *QCM à réponse unique*

1. Soit $(v_n)_{n\geqslant 0}$ une suite arithmétique de raison $\frac{5}{2}$ et telle que $v_1 = 5$.
Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :

Réponse A : $v_{2n} = 5 + \frac{5}{2}n$ **Réponse B :** $v_{2n} = 5 + 5n$

Réponse C : $v_{2n} = \frac{5}{2} + 5n$ **Réponse D :** $v_{2n} = \frac{5}{2} + \frac{5}{2}n$

2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et telle que $u_2 = 20$.
Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :

Réponse A : $u_n = \frac{20}{2^n}$ **Réponse B :** $u_n = \frac{80}{2^n}$

Réponse C : $u_n = 20 + \frac{n-2}{2}$ **Réponse D :** $u_n = \frac{5}{2^n}$

3. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite arithmétique de raison $q \neq 1$ et de premier terme $u_0 \neq 0$.
La somme de termes consécutifs $u_{30} + u_{41} + \ldots + u_{69}$ est égale à :

Réponse A : $u_{30} \times \frac{1-q^{39}}{1-q}$ **Réponse B :** $u_{30} \times \frac{1-q^{40}}{1-q}$

Réponse C : $39 \times \frac{u_{30}+u_{69}}{2}$ **Réponse D :** $40 \times \frac{u_{30}+u_{69}}{2}$

4. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme $u_0 \neq 0$.
La somme de termes consécutifs $u_{30} + u_{41} + \ldots + u_{69}$ est égale à :

Réponse A : $u_{30} \times \frac{1-q^{39}}{1-q}$ **Réponse B :** $u_{30} \times \frac{1-q^{40}}{1-q}$

Réponse C : $39 \times \frac{u_{30}+u_{69}}{2}$ **Réponse D :** $40 \times \frac{u_{30}+u_{69}}{2}$

Exercice 2 *Suite arithmético-géométrique*

Un particulier souhaite réaménager l'espace paysager de sa parcelle boisée comptant 10 000 arbres en 2018. Pour cela, il se fixe un plan progressif qui consiste à couper chaque année 20 % des arbres et à planter 600 nouveaux pieds d'arbre.

On modélise l'évolution du nombre d'arbres de cette parcelle par une suite (u_n) dans laquelle, pour tout entier naturel n, u_n est le nombre d'arbres de la parcelle en $2018 + n$, ainsi $u_0 = 10\,000$.

On admet que pour tout entier naturel n, on a l'égalité $u_{n+1} = 0,8 \times u_n + 600$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 3\,000$ pour tout entier naturel n.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,8$.

b. Déterminer la valeur de v_0.

c. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.

d. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 7\,000 \times 0,8^n + 3\,000$.

e. Si le réaménagement de cette parcelle se poursuit selon ce même modèle, le nombre d'arbres pourra-t-il devenir inférieur à 2900 ? Justifier.

Corrigé 1

Exercice 1

On modélise le nombre d'arbres par la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\,000$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0{,}8\,u_n + 600 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

1. Calculs des premiers termes :

$$u_1 = 0{,}8 \times 10\,000 + 600 = 8\,000 + 600 = 8\,600, \qquad u_2 = 0{,}8 \times 8\,600 + 600 = 6\,880 + 600 = 7\,480.$$

2. On définit la suite v pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 3\,000$.

a. Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3\,000 = 0{,}8\,u_n + 600 - 3\,000 = 0{,}8(u_n - 3\,000) = 0{,}8\,v_n.$$

Donc la suite v est géométrique de raison $q = 0{,}8$ et $v_0 = u_0 - 3\,000 = 7\,000$.

b. Pour tout entier naturel n, par propriété des suites géométriques, on a :

$$v_n = 7\,000 \times 0{,}8^n.$$

c. On en déduit que pour tout entier naturel n :

$$u_n = v_n + 3\,000 = 7\,000 \times 0{,}8^n + 3\,000.$$

d. Pour tout entier naturel n on a $0{,}8^n > 0$, donc $u_n = 3\,000 + 7\,000 \times 0{,}8^n > 3\,000$. D'après ce modèle d'évolution, le nombre d'arbres ne peut donc jamais devenir inférieur à 2 900.