Exercice 1 *Vérifier qu'une fonction est une primitive*

Dans chaque cas, vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I indiqué. Justifier soigneusement le calcul de F'.

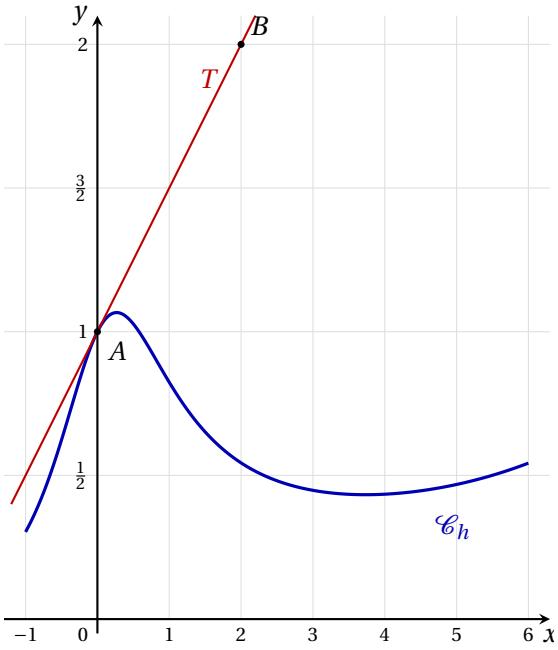
1. $I=\mathbb{R}$, $F(x)=(x-1)\mathrm{e}^{2x+1}$, $f(x)=(2x-1)\mathrm{e}^{2x+1}$.
2. $I=]-1;+\infty[$, $F(x)=\dfrac{x^2+2}{x+1}$, $f(x)=\dfrac{x^2+2x-2}{(x+1)^2}$.
3. $I=\mathbb{R}$, $F(x)=(3x-1)^4$, $f(x)=12(3x-1)^3$.

Exercice 2 *Lecture graphique et étude d'un quotient*

On considère la fonction h définie sur $[-1;6]$ par

$$h(x)=\frac{\mathrm{e}^{x/2}}{x^2+1}.$$

Partie A – Lecture graphique. La courbe $\mathscr{C}_h$ ci-dessous représente la fonction h sur l'intervalle $[-1;6]$. La droite T est la tangente à $\mathscr{C}_h$ au point d'abscisse 0. La droite T passe par les points $A(0;1)$ et $B(2;2)$.



1. Déterminer le coefficient directeur de la tangente T.

2. Déterminer alors une équation de la tangente T.

Partie B – Étude de la fonction h.

1. h est dérivable sur $[-1;6]$ comme quotient de fonctions dérivables. Montrer que, pour tout réel $x\in[-1;6]$,

$$h'(x)=\frac{\mathrm{e}^{x/2}(x^2-4x+1)}{2(x^2+1)^2}.$$

2. Calculer le discriminant du trinôme x^2-4x+1, puis déterminer ses racines.

3. Étudier le signe de $h'(x)$ sur $[-1;6]$.

4. Dresser le tableau de variations de h sur $[-1;6]$.

Exercice 3 *Calculs de primitives*

Pour chaque fonction f, déterminer **une** primitive F sur l'intervalle I indiqué.

1. $f(x) = 9x^2 - 4x + 7$, $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = 2\mathrm{e}^x - 3\mathrm{e}^{-x} + 5$, $I = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$, $I =]0;+\infty[$.
4. $f(x) = 4x - 1 + \mathrm{e}^x$, $I = \mathbb{R}$; déterminer la primitive F telle que $F(0) = 2$.

Exercice 4 *Signe d'une fonction et variations d'une primitive*

Soit f une fonction continue sur $[-3;5]$, dont le tableau de signes est donné ci-dessous. On considère une primitive F de f sur $[-3;5]$.

x	-3		-1		2		5
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

À l'aide du tableau de signes de f, déterminer le tableau de variations de F sur $[-3;5]$.

Exercice 5 *Équations différentielles*

Dans tout l'exercice, l'inconnue y est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre (E_1) : $y' = -3y$, puis déterminer la solution u telle que $u(0) = 4$.

2. Résoudre (E_2) : $y' = 2y - 6$, puis déterminer la solution v telle que $v(0) = 1$.

3. On considère (E_3) : $y' + 2y = 3\mathrm{e}^x$.

a. Vérifier que $p(x) = \mathrm{e}^x$ est une solution particulière de (E_3).

b. Résoudre l'équation homogène associée $y' + 2y = 0$.

> **Rappel – Principe de superposition.** Pour une équation différentielle $y' = ay + f(x)$, avec a constant, si p est une solution particulière, alors toutes les solutions s'écrivent $y(x) = p(x) + Ce^{ax}$, avec $C \in \mathbb{R}$. C'est le même principe que pour la résolution de $y' = ay + b$, avec a et b constants.

c. En déduire l'ensemble des solutions de (E_3), puis déterminer la solution u celle qui vérifie $u(0) = 5$.