

1 Définition et propriétés algébriques

1.1 Définition



Théorème-Définition 1

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction s'appelle **fonction exponentielle** et se note **exp**.
Ainsi pour tout réel x , on a $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$.

1.2 Propriétés algébriques



Théorème 2 Relation fonctionnelle

Pour tous réels x et y , on a : $\exp(x) \times \exp(y) = \exp(x + y)$.



Corollaire propriétés algébriques

Pour tous réels x et y on a :

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \quad (1)$$

$$\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)} \quad (2)$$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \exp(nx) = (\exp(x))^n \quad (3)$$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{Z}, \exp(nx) = (\exp(x))^n \quad (4)$$

$$\exp(x) > 0 \quad (5)$$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{Z}, \exp(nx) = (\exp(x))^n \quad (6)$$

$$\exp(x) > 0 \quad (7)$$

2 Notation e^x

2.1 Nombre d'Euler et notation e^x



Définition 1

L'image de 1 par la fonction exponentielle est le **nombre d'Euler**.
On note $\exp(1) = e$ et on a $e \approx 2,718$.



Remarque 1

D'après le corollaire du théorème 2, pour tout réel x et pour tout entier naturel n , on a $\exp(nx) = (\exp(x))^n$.
En particulier, pour $x = 1$, on a pour tout entier relatif, $\exp(n) = (\exp(1))^n = e^n$ avec la notation $\exp(1) = e$ du nombre d'Euler.
Par extension de cette égalité, on note pour tout réel x : $\exp(x) = e^x$.
Désormais nous noterons e^x l'image d'un réel x par la fonction exponentielle.
On peut reformuler les propriétés algébriques de la fonction exponentielle avec cette nouvelle notation.



Propriété 1

Pour tous réels x et y et tout entier relatif n :

$$e^1 = e$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$e^0 = 1$$

$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$$

$$e^x \times e^y = e^{x+y}$$

$$(e^x)^n = e^{nx}$$

2.2 Fonction exponentielle et suites géométriques



Propriété 2

Pour tout réel a , la suite $(e^{na})_{n \geq 0}$ est géométrique de raison e^a .

3 Étude de la fonction exponentielle



Propriété 3

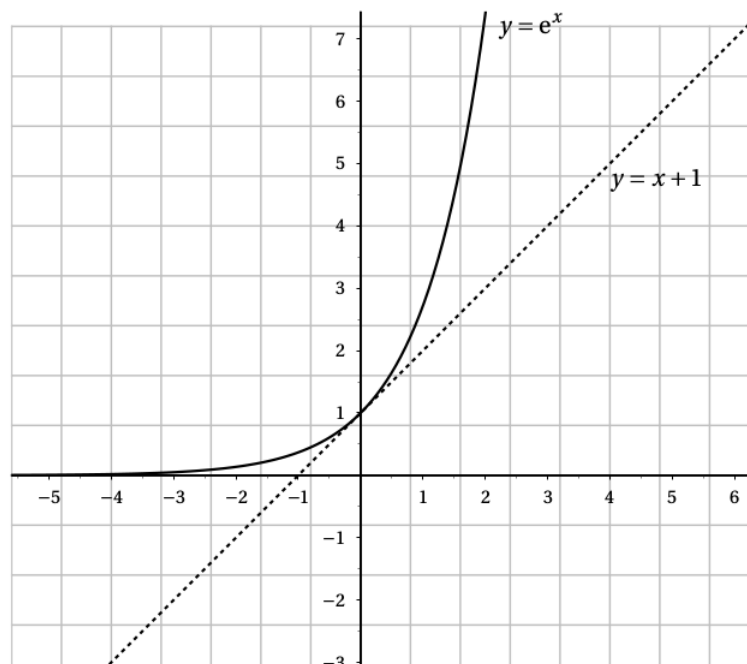
La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x , on a $e^x > 0$.



Propriété 4

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x		1	



4 Fonction composée $x \mapsto e^{ax+b}$



Propriété 5

1. Par définition, la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et elle est égale à sa fonction dérivée.
2. Soit a et b des réels. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction composée $g : x \mapsto e^{ax+b}$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , on a :

$$g'(x) = ae^{ax+b}$$

5 Capacités



Capacité 1 Étudier une fonction $g : x \mapsto ae^x + bx + c$

On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $f(x) = e^x$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
2. On considère la fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$, définie par $g(x) = e^x - x - 1$. On note g' la fonction dérivée de g .
 - a. Soit x un réel, déterminer une expression de $g'(x)$.
 - b. Étudier le signe de g' sur $\mathbb{R}$.
 - c. En déduire les variations de g sur $\mathbb{R}$.
 - d. Dresser le tableau de variation de g et la valeur de son minimum.
 - e. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.
 - f. Quelle propriété peut-on en déduire pour la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente $\mathcal{T}$ au point d'abscisse 0?



Capacité 2 Dériver une fonction composée $x \mapsto e^{ax+b}$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^{-2x+1}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables.

1. Démontrer que pour tout réel x , on a :

$$f'(x) = (-2x-1)e^{-2x+1}$$

2. Dresser le tableau variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire que pour tout réel x , on a $f(x) < \frac{9}{2}$.

 Capacité 3 Dériver une fonction composée $x \mapsto e^{ax+b}$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 12)e^{-2x+1}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables.

1. Démontrer que pour tout réel x , on a :

$$f'(x) = -2(x^2 - x - 12)e^{-2x+1}$$

2. Étudier le signe sur $\mathbb{R}$ du trinôme d'expression $-2(x^2 - x - 12)$.
3. Dresser le tableau variation de f sur $\mathbb{R}$.