

Maths Complémentaires : Fiche d'exercices sur l'exponentielle

Correction 1

$$A = e^{-4+(-4)}$$

$$A = e^{-8}$$

$$B = e^3 \times e^{-4} + e^3 \times e^{-2}$$

$$B = e^{3+(-4)} + e^{3+(-2)}$$

$$B = e^{-1} + e^1$$

$$C = e^{5 \times 2} - e^{3+3}$$

$$C = e^{10} - e^6$$

$$D = \frac{e^{-5+5}}{e^{-1}}$$

$$D = \frac{1}{e^{-1}}$$

$$D = e^{-(-1)}$$

$$D = e^1$$

$$E = e^{4 \times 3} \times e^{2 \times 4}$$

$$E = e^{12} \times e^8$$

$$E = e^{12+8}$$

$$E = e^{20}$$

$$F = e^{(-2) \times 3}$$

$$F = e^{-6}$$

$$G = \frac{e^{(-3) \times (-1)}}{e^5}$$

$$G = \frac{e^3}{e^5}$$

$$G = e^{3-5}$$

$$G = e^{-2}$$

Correction 2

On utilise la propriété :

Pour tous réels a et b , $e^a = e^b \iff a = b$

On en déduit que :

$$e^{2x+5} = e^{8x-1}$$

$$\iff 2x + 5 = 8x - 1$$

$$\iff -6x = -6$$

$$\iff x = 1$$

$$\text{Donc } S = \{1\}$$

Correction 3

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, pour tous réels u et v , $e^u > e^v \iff u > v$.

$$e^{-3x+5} > e^{9x-5}$$

$$\iff -3x + 5 > 9x - 5$$

$$\iff -12x > -10$$

$$\iff x < \frac{5}{6} \quad \text{car } -12 \text{ est strictement négatif}$$

$$\text{Donc } S = \left] -\infty ; \frac{5}{6} \right[.$$

Correction 4

On reconnaît que $f = u \times v$ avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = -4x - 8$.

On a $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = -4$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned}f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\&= e^x \times (-4x - 8) + e^x \times (-4) \\&= e^x(-4x - 8 - 4) \\&= (-4x - 12)e^x\end{aligned}$$

Correction 5

On reconnaît que $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = x - 4$ et $v(x) = 2e^x$.

On a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2e^x$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v(x)^2} \\&= \frac{1 \times 2e^x - (x - 4) \times 2e^x}{(2e^x)^2} \\&= \frac{2e^x(1 - (x - 4))}{(2e^x)^2} \\&= \frac{2e^x(-x + 5)}{4e^{2x}} \\&= \frac{-x + 5}{2e^x}\end{aligned}$$

Correction 6

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on sait que si u est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $(e^u)' = u'e^u$.

On en déduit que :

$$f'(x) = 2e^{2x} + 8e^x - 10$$

On obtient une expression développée de la dérivée.

Développons l'expression factorisée de l'énoncé :

$$\begin{aligned}2(e^x - 1)(e^x + 5) &= 2(e^{2x} + 5e^x - e^x - 5) \\&= 2e^{2x} + 8e^x - 10 \\&= f'(x).\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2(e^x - 1)(e^x + 5)$.

1. Pour tout réel x , $e^x > 0$, donc $e^x + 5 > 0$.

Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $e^x - 1$.

Or

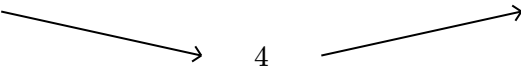
$$e^x > 1 \iff e^x > e^0$$

$$\iff x > 0 \text{ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur } \mathbb{R}.$$

On en déduit que $f'(x) < 0$ sur $] -\infty ; 0[$, $f'(0) = 0$ et $f'(x) > 0$ sur $]0 ; +\infty[$.

1. La fonction f est décroissante sur $] -\infty ; 0]$ puis croissante sur $[0 ; +\infty[$.

De plus, $f(0) = e^0 + 8e^0 - 5 = 4$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

1. La fonction dérivée s'annule et change de signe en 0.

D'après ses variations, f admet un minimum en 0 qui vaut $f(0) = 4$, strictement positif.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$.

1. Pour étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite $(\mathcal{D})$, on étudie le signe de $f(x) - (-10x - 5)$.

On simplifie cette différence :

$$\begin{aligned}
 f(x) - (-10x - 5) &= e^{2x} + 8e^x - 10x - 5 - (-10x - 5) \\
 &= e^{2x} + 8e^x \\
 &= e^x(e^x + 8).
 \end{aligned}$$

Pour tout réel x , $e^x > 0$ et $e^x + 8 > 0$.

Ainsi, pour tout réel x , $f(x) - (-10x - 5) > 0$, donc $f(x) > -10x - 5$.

La courbe $\mathcal{C}_f$ est donc **strictement au-dessus** de la droite $\mathcal{D}$ sur $\mathbb{R}$.