

1 Définition



Théorème-Définition 1

Pour tout réel $x > 0$ il existe un unique réel y tel que $e^y = x$, ce réel est le logarithme népérien de x noté $y = \ln x$.

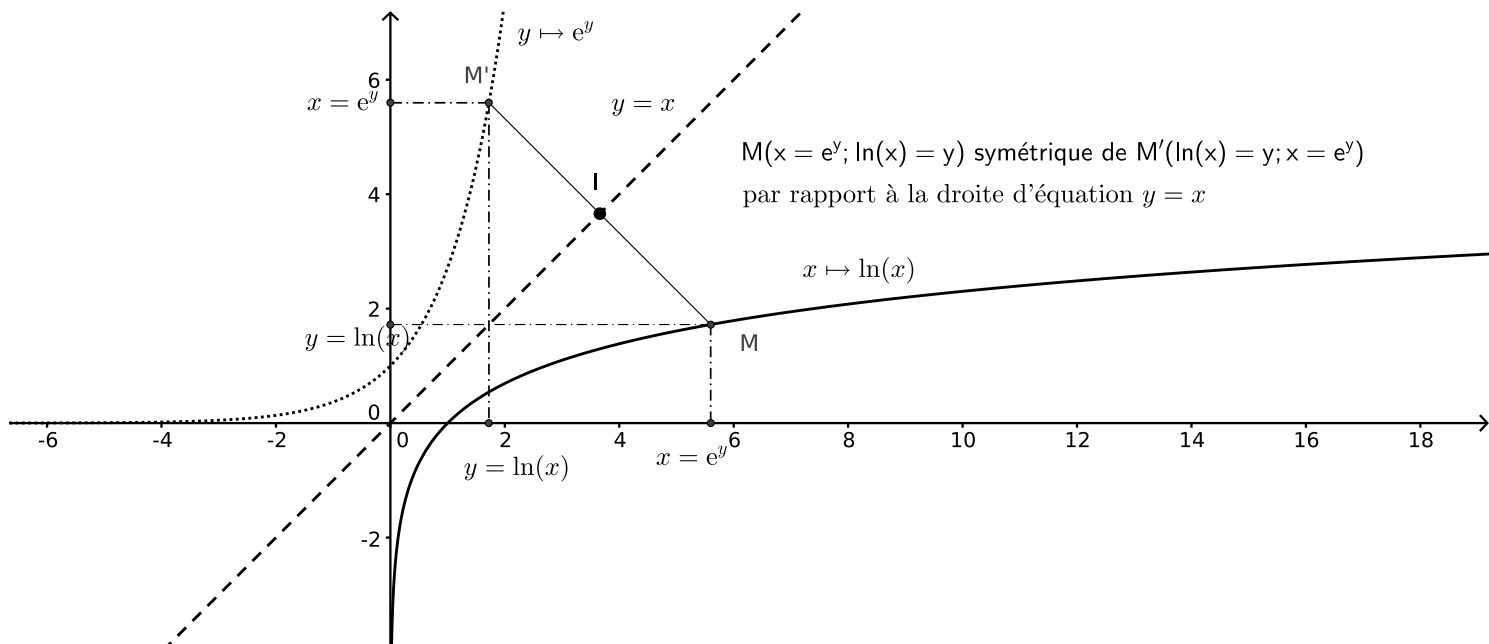
On définit ainsi sur $]0; +\infty[$ la fonction logarithme népérien $\ln : x \mapsto \ln x$, c'est la **fonction réciproque** de la fonction exponentielle.

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \ln x = y \iff x = e^y$$



ne pas confondre les touches **Ln** et **Log** (qui correspond au *logarithme décimal*, pour tout $x > 0$,

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}).$$



Corollaire $\ln$ fonction réciproque de $\exp$

1. Pour tout réel x , $\ln(e^x) = x$.
2. Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$.
3. En particulier, on a $\ln(e) = 1$ et $\ln(1) = 0$.
4. Dans un repère orthonormé, les courbes des fonctions $\exp$ et $\ln$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Capacité 1 Utiliser la fonction logarithme népérien pour simplifier une exponentielle et réciproquement

1. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x un réel.

a. $e^{x^2} = e^2$

c. $e^{2-x} = 0$

e. $e^{2-x} = -3$

b. $e^{2-x} = 1$

d. $e^{2-x} = 3$

f. $e^{2-x} = e^{x^2}$

2. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x un réel strictement positif.

a. $\ln(x) = 0$

c. $\ln(x) = 2$

b. $\ln(x) = 1$

d. $\ln(x) = -2$

2 Dérivée et sens de variation

Propriété 1 admise

1. La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a :

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

2. La fonction $\ln$ est **strictement croissante** sur $]0; +\infty[$.

3 Tableau de variations

Propriété 2 Tableau de variation complet

1. Des propriétés sur le sens de variation et les limites de la fonction $\ln$, on peut déduire son tableau de variations complet :

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

2. Du tableau de variations on déduit le tableau de signes de la fonction $\ln$:

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$	-	0	+

Capacité 2 Utiliser la fonction logarithme népérien pour simplifier une exponentielle et réciproquement

Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x \ln(x)$.
 g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Soit x un réel strictement positif, déterminer une expression de $g'(x)$.
2. Étudier le signe de la fonction g' et en déduire les variations de la fonction g .

4 Propriétés algébriques

Propriété 3 Équation fonctionnelle

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$



On dit que la fonction $\ln$ vérifie l'**équation fonctionnelle** $f(ab) = f(a) + f(b)$.

Corollaire admis

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, pour tout entier relatif n :

$$\begin{array}{lll} \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) & \text{et} & \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \\ \ln(a^n) = n\ln(a) & \text{et} & \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a) \end{array}$$

Capacité 3 Utiliser les propriétés algébriques de la fonction logarithme pour simplifier une expression, voir exo résolu 11 p.93

Exprimer en fonction de $\ln(3)$, $\ln(5)$ ou d'un entier :

- | | | |
|--------------|--|----------------------|
| 1. $\ln(15)$ | 3. $\ln(0,6)$ | 5. $\ln(\sqrt{15})$ |
| 2. $\ln(75)$ | 4. $\ln\left(e^{\ln(5/3)} e^{\ln(3)}\right)$ | 6. $\ln(3^4)\ln(5e)$ |

5 Fonctions composées $x \mapsto \ln(u(x))$ et logarithme décimal

**Propriété 4 admise**

Soit u une fonction définie sur un intervalle I qui est dérivable et strictement positive sur I .
La fonction composée définie sur I par $g(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur I et on a :

$$\text{pour tout } x \in I \text{ on a } g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

On en déduit que les fonctions u et $g = \ln(u)$ suivent les mêmes variations sur l'intervalle I .

**Capacité 4 Datation au carbone 14**

Le carbone 14 est un isotope radioactif du carbone employé en archéologie pour dater la matière organique retrouvée lors de fouilles.

La formule suivante donne l'âge T , en années, d'un échantillon extrait lors de fouilles archéologiques, en fonction du pourcentage p % de carbone 14 qu'il contient :

$$T = 8264 \ln\left(\frac{100}{p}\right)$$

1. Dans quel intervalle I varie p ?
2. Démontrer que la fonction T est décroissante sur l'intervalle I .
3. On a détecté 5 % de carbone 14 dans une squelette ancien qui semble très ancien.
Estimer l'âge du squelette. Arrondir à la centaine d'années.
4. La datation au carbone 14 a permis d'estimer l'âge d'une momie à 2500 ans.
Quel pourcentage de carbone 14 contient-elle encore ? Arrondir à l'unité.

5.1 Logarithme décimal**Définition 1**

La fonction logarithme décimal de x est définie sur $]0; +\infty[$ par $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

En particulier on a $\log(1) = 0$ et $\log(10) = 1$.

**Propriété 5**

1. La fonction logarithme décimal est dérivable et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Pour tout réel $x > 0$, on a $\log'(x) = \frac{1}{x \ln(10)}$.

2. Pour tous réels a et b strictement positifs et tout entier relatif n :

$$\bullet \log(ab) = \log(a) + \log(b)$$

$$\bullet \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

$$\bullet \log(10^n) = n$$

$$\bullet \log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log(a)$$

$$\bullet \log(a^n) = n \log(a)$$

$$\bullet \log(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \log(a)$$

3. Pour tout réel y et tout réel $x > 0$ on a $10^x = y \iff x = \log(y)$

Capacité 5 utiliser la fonction logarithme décimal

1. Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = -\log(x)$.

- Déterminer l'image de $x = 10^{-3}$ par la fonction f .
- Déterminer l'antécédent de 4 par la fonction f .

2. En chimie, le caractère acido-basique d'une solution se mesure avec un indicateur noté **pH** :

$$\text{pH} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+]$$

$[\text{H}_3\text{O}^+]$ est la concentration des ions hydronium exprimée en mol.L^{-1} .

- Pour un acide on a : $1 < \text{pH} < 7$. En déduire la concentration en ions H_3O^+ d'un acide.
- Pour une base on a : $7 < \text{pH} < 14$. En déduire la concentration en ions H_3O^+ d'une base.
- Pour la sang, on a : $[\text{H}_3\text{O}^+] = 3,98 \times 10^{-8} \text{ mol.L}^{-1}$. Montrer que le sang est légèrement basique.

Table des matières

1	Définition	1
2	Dérivée et sens de variation	2
3	Tableau de variations	2
4	Propriétés algébriques	3
5	Fonctions composées $x \mapsto \ln(u(x))$ et logarithme décimal	3
5.1	Logarithme décimal	4