

Corrigé des capacités

Capacité 1 – Étudier une fonction $g : x \mapsto ae^x + bx + c$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^x.$$

1. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et elle est égale à sa fonction dérivée. Ainsi :

$$f'(x) = e^x.$$

En particulier :

$$f(0) = e^0 = 1 \quad \text{et} \quad f'(0) = e^0 = 1.$$

Une équation de la tangente à la courbe représentative d'une fonction f au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Pour $a = 0$, on obtient donc :

$$y = 1(x - 0) + 1.$$

Ainsi, une équation de la tangente $\mathcal{T}$ est :

$$\boxed{y = x + 1}.$$

2. On considère maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = e^x - x - 1.$$

a. Déterminer une expression de $g'(x)$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables.

On utilise :

$$(e^x)' = e^x, \quad (-x)' = -1 \quad \text{et} \quad (-1)' = 0.$$

Ainsi, pour tout réel x :

$$\boxed{g'(x) = e^x - 1}.$$

b. Étudier le signe de g' sur $\mathbb{R}$.

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et

$$e^0 = 1.$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} e^x < 1 & \text{si } x < 0, \\ e^x = 1 & \text{si } x = 0, \\ e^x > 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Comme

$$g'(x) = e^x - 1,$$

on en déduit :

$$\begin{cases} g'(x) < 0 & \text{si } x < 0, \\ g'(0) = 0, \\ g'(x) > 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

c. En déduire les variations de g sur $\mathbb{R}$.

Sur $] -\infty; 0[$, on a $g'(x) < 0$. La fonction g est donc strictement décroissante sur $] -\infty; 0[$.

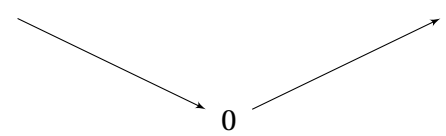
Sur $]0; +\infty[$, on a $g'(x) > 0$. La fonction g est donc strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

d. Dresser le tableau de variations de g et déterminer la valeur de son minimum.

Calculons la valeur de g au point où sa dérivée s'annule :

$$g(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Le tableau de variations de g est donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$			

La fonction g admet donc sur $\mathbb{R}$ un minimum égal à 0, atteint pour $x = 0$:

$$g(0) = 0.$$

e. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Le minimum de la fonction g est égal à 0.

Par conséquent, pour tout réel x :

$$g(x) \geq 0.$$

De plus, le minimum est atteint uniquement pour $x = 0$. Ainsi :

$$\begin{cases} g(x) > 0 & \text{si } x \neq 0, \\ g(0) = 0. \end{cases}$$

Autrement dit :

$$e^x - x - 1 \geq 0.$$

On peut encore écrire :

$$e^x \geq x + 1.$$

f. En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente $\mathcal{T}$ au point d'abscisse 0.

La courbe $\mathcal{C}_f$ a pour équation :

$$y = e^x,$$

et la tangente $\mathcal{T}$ a pour équation :

$$y = x + 1.$$

Pour comparer les ordonnées de ces deux courbes à une même abscisse x , on étudie leur différence :

$$e^x - (x + 1) = e^x - x - 1 = g(x).$$

Or nous avons démontré que :

$$g(x) \geq 0$$

pour tout réel x .

Ainsi :

$$e^x \geq x + 1.$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ est donc située au-dessus de sa tangente $\mathcal{T}$ en tout point. L'égalité a lieu uniquement pour $x = 0$.

On peut donc conclure :

$$\mathcal{C}_f \text{ est située au-dessus de sa tangente } \mathcal{T} \text{ au point d'abscisse } 0.$$

Capacité 2 – Dériver une fonction composée $x \mapsto e^{ax+b}$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+1)e^{-2x+1}.$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables.

1. Démontrer que, pour tout réel x ,

$$f'(x) = (-2x-1)e^{-2x+1}.$$

Posons :

$$u(x) = x+1 \quad \text{et} \quad v(x) = e^{-2x+1}.$$

Alors :

$$f = uv.$$

On a :

$$u'(x) = 1.$$

Pour dériver v , on utilise la formule :

$$(e^{ax+b})' = ae^{ax+b}.$$

Ici $a = -2$, donc :

$$v'(x) = -2e^{-2x+1}.$$

D'après la formule de dérivation d'un produit :

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times e^{-2x+1} + (x+1) \times (-2e^{-2x+1}) \\ &= e^{-2x+1} - 2(x+1)e^{-2x+1}. \end{aligned}$$

On factorise par e^{-2x+1} :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1 - 2(x+1))e^{-2x+1} \\ &= (1 - 2x - 2)e^{-2x+1} \\ &= (-2x - 1)e^{-2x+1}. \end{aligned}$$

Donc :

$$f'(x) = (-2x-1)e^{-2x+1}.$$

2. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x :

$$e^{-2x+1} > 0.$$

Le signe de $f'(x)$ est donc celui du facteur $-2x - 1$.

Réolvons :

$$-2x - 1 = 0.$$

On obtient :

$$-2x = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}.$$

La fonction affine $x \mapsto -2x - 1$ a un coefficient directeur négatif. Ainsi :

$$\begin{cases} -2x - 1 > 0 & \text{si } x < -\frac{1}{2}, \\ -2x - 1 = 0 & \text{si } x = -\frac{1}{2}, \\ -2x - 1 < 0 & \text{si } x > -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Par conséquent :

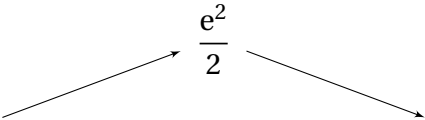
$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{si } x < -\frac{1}{2}, \\ f'(x) = 0 & \text{si } x = -\frac{1}{2}, \\ f'(x) < 0 & \text{si } x > -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

La fonction f est donc croissante sur $] -\infty; -\frac{1}{2}]$ puis décroissante sur $[-\frac{1}{2}; +\infty[$.

Calculons la valeur de f en $-\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \left(-\frac{1}{2} + 1\right) e^{-2\left(-\frac{1}{2}\right)+1} \\ &= \frac{1}{2} e^2. \end{aligned}$$

Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

La fonction f admet donc un maximum sur $\mathbb{R}$, atteint pour $x = -\frac{1}{2}$, égal à :

$$\boxed{\frac{e^2}{2}}.$$

3. En déduire que, pour tout réel x ,

$$f(x) < \frac{9}{2}.$$

D'après le tableau de variations, pour tout réel x :

$$f(x) \leq \frac{e^2}{2}.$$

Or :

$$e \approx 2,718,$$

donc :

$$\frac{e^2}{2} \approx \frac{2,718^2}{2} \approx 3,69.$$

Comme :

$$3,69 < 4,5 = \frac{9}{2},$$

on obtient :

$$\frac{e^2}{2} < \frac{9}{2}.$$

Par conséquent, pour tout réel x :

$$f(x) \leq \frac{e^2}{2} < \frac{9}{2}.$$

Ainsi :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < \frac{9}{2}$.

Capacité 3 – Dériver une fonction composée $x \mapsto e^{ax+b}$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2 - 12)e^{-2x+1}.$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables.

1. Démontrer que, pour tout réel x ,

$$f'(x) = -2(x^2 - x - 12)e^{-2x+1}.$$

Posons :

$$u(x) = x^2 - 12 \quad \text{et} \quad v(x) = e^{-2x+1}.$$

Alors :

$$f = uv.$$

On a :

$$u'(x) = 2x$$

et, d'après la formule de dérivation d'une fonction de la forme $x \mapsto e^{ax+b}$:

$$v'(x) = -2e^{-2x+1}.$$

La dérivée d'un produit vérifie :

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{-2x+1} + (x^2 - 12)(-2e^{-2x+1}) \\ &= (2x - 2(x^2 - 12))e^{-2x+1} \\ &= (2x - 2x^2 + 24)e^{-2x+1} \\ &= (-2x^2 + 2x + 24)e^{-2x+1}. \end{aligned}$$

On factorise le polynôme par -2 :

$$-2x^2 + 2x + 24 = -2(x^2 - x - 12).$$

Ainsi :

$$f'(x) = -2(x^2 - x - 12)e^{-2x+1}.$$

2. Étudier le signe sur $\mathbb{R}$ du trinôme d'expression $-2(x^2 - x - 12)$.

On commence par factoriser :

$$x^2 - x - 12.$$

On remarque que :

$$x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3),$$

car :

$$(x - 4)(x + 3) = x^2 - x - 12.$$

Ainsi :

$$-2(x^2 - x - 12) = -2(x - 4)(x + 3).$$

Les racines du trinôme sont donc :

$$x = -3 \quad \text{et} \quad x = 4.$$

On peut dresser le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-3	4	$+\infty$	
$-2(x^2 - x - 12)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Ainsi :

$$\begin{cases} -2(x^2 - x - 12) < 0 & \text{sur }]-\infty; -3[\cup]4; +\infty[, \\ -2(x^2 - x - 12) = 0 & \text{pour } x = -3 \text{ ou } x = 4, \\ -2(x^2 - x - 12) > 0 & \text{sur }]-3; 4[. \end{cases}$$

3. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

On a :

$$f'(x) = -2(x^2 - x - 12)e^{-2x+1}.$$

Or, pour tout réel x :

$$e^{-2x+1} > 0.$$

La fonction exponentielle étant strictement positive, elle ne modifie pas le signe du produit. Le signe de $f'(x)$ est donc exactement celui de :

$$-2(x^2 - x - 12).$$

D'après la question précédente :

$$\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{si } x < -3, \\ f'(-3) = 0, \\ f'(x) > 0 & \text{si } -3 < x < 4, \\ f'(4) = 0, \\ f'(x) < 0 & \text{si } x > 4. \end{cases}$$

Ainsi, la fonction f est :

- décroissante sur $] -\infty; -3]$;
- croissante sur $[-3; 4]$;
- décroissante sur $[4; +\infty[$.

Calculons les valeurs de f aux deux points où sa dérivée s'annule.

Pour $x = -3$:

$$\begin{aligned} f(-3) &= ((-3)^2 - 12)e^{-2(-3)+1} \\ &= (9 - 12)e^7 \\ &= -3e^7. \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{f(-3) = -3e^7}.$$

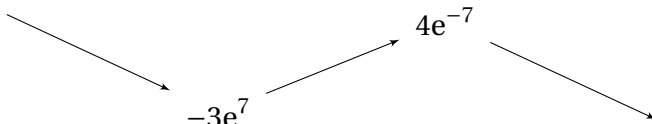
Pour $x = 4$:

$$\begin{aligned} f(4) &= (4^2 - 12)e^{-2 \times 4 + 1} \\ &= (16 - 12)e^{-7} \\ &= 4e^{-7}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{f(4) = 4e^{-7}}.$$

Le tableau de variations de f est donc :

x	$-\infty$	-3	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$					

La fonction f admet donc :

- un minimum local en $x = -3$, égal à

$$\boxed{-3e^7};$$

- un maximum local en $x = 4$, égal à

$$\boxed{4e^{-7}}.$$