

Correction de la fiche d'exercices sur les équations différentielles

Exercice 1 Vérifier si une fonction est solution d'une équation différentielle

Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x , on a $f(x) = 5xe^{-x}$.

La fonction f est-elle solution de l'équation différentielle $y' + y = 5e^{-x}$?

Pour tout réel x , on a :

$$f(x) = u(x) \times v(x) \quad \text{avec } u \text{ et } v \text{ dérivables sur } \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} u(x) &= 5x & v(x) &= e^{-x} \\ u'(x) &= 5 & v'(x) &= -e^{-x} \end{aligned}$$

$$f' = u' \times v + u \times v'$$

$$\begin{aligned} \text{donc } f'(x) &= 5e^{-x} + 5x \times (-e^{-x}) \\ f'(x) &= 5e^{-x} - 5xe^{-x} \end{aligned}$$

$$\text{donc } f'(x) + f(x) = 5e^{-x} - 5xe^{-x} + 5xe^{-x} = 5e^{-x}$$

$$\text{donc } f \text{ solution de l'équation différentielle} \\ y' + y = 5e^{-x}$$

Exercice 2 Équations différentielles $y' = ay$ avec a constante

1. Déterminer l'ensemble des solutions de chacune des équations différentielles suivantes qui a pour inconnue une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. $y' = 3y$

b. $y' + 6y = 0$

c. $3y' - 2y = 0$

d. $4y' + 5y = 6y + 8y'$

2. Dans chaque cas, on donne une équation différentielle d'inconnue une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'unique solution f qui vérifie la condition fixée.

a. $\begin{cases} y' = -10y \\ f(0) = 4 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2y' - 3y = 2y + 3y' \\ f(0) = \pi \end{cases}$

c. $\begin{cases} y' + \sqrt{3}y = 0 \\ f(\sqrt{3}) = 5 \end{cases}$

d. $\begin{cases} y' = -3y + 7 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1) On applique directement la propriété du cours :

a) Les solutions de l'équation différentielle $y' = 3y$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$$f: x \mapsto C e^{3x} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

b) Les solutions de l'équation différentielle $y' + 6y = 0 \Leftrightarrow y' = -6y$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$$f: x \mapsto C e^{-6x} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

c) Les solutions de l'équation différentielle $3y' - 2y = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{2}{3}y$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$$f: x \mapsto C e^{\frac{2}{3}x} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

d) Les solutions de l'équation différentielle
 $4y' + 5y = 6y + 8y' \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{4}y$
sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme:
 $f: x \mapsto C e^{-\frac{1}{4}x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

2)

a) Une solution de l'équation différentielle :

$y' = -10y$
est une fonction définies sur $\mathbb{R}$ par
 $f(x) = C e^{-10x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Si de plus on a $f(0) = 4$ alors :

$$f(0) = 4 \Leftrightarrow C e^{-10 \times 0} = 4 \Leftrightarrow C = 4$$

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4 e^{-10x}$
est donc l'unique solution du système différentiel $\begin{cases} y' = -10y \\ f(0) = 4 \end{cases}$

b) Une solution de l'équation différentielle :

$$2y' - 3y = 2y + 3y' \Leftrightarrow y' = -5y$$

est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = C e^{-5x} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

Si de plus on a $f(0) = \pi$ alors :

$$f(0) = \pi \Leftrightarrow C e^{-5 \times 0} = \pi \Leftrightarrow C = \pi$$

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \pi e^{-5x}$ est donc l'unique solution du système différentiel
$$\begin{cases} y' = -5y \\ f(0) = \pi \end{cases}$$

c) Une solution de l'équation différentielle :

$$y' + \sqrt{3}y = 0 \Leftrightarrow y' = -\sqrt{3}y$$

est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = C e^{-\sqrt{3}x} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

Si de plus on a $f(\sqrt{3}) = 5$ alors :

$$f(\sqrt{3}) = 5 \Leftrightarrow C e^{-\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = 5 \Leftrightarrow C = 5e^3$$

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5e^3 e^{-\sqrt{3}x}$ est donc l'unique solution du système différentiel
$$\begin{cases} y' = -\sqrt{3}y \\ f(\sqrt{3}) = 5 \end{cases}$$

d) Une solution de l'équation différentielle :

$$y' = -3y + 7$$

est une fonction définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = C e^{-3x} + \frac{7}{3} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

Si de plus on a $f(0) = 1$ alors :

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow C + \frac{7}{3} = 1 \quad (\Rightarrow) C = -\frac{4}{3}$$

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{4}{3} e^{-3x} + \frac{7}{3}$ est donc l'unique solution du système différentiel $\left\{ \begin{array}{l} y' = -3y + 7 \\ f(0) = 1 \end{array} \right.$

Exercice 3 Équation différentielle $y' = ay + b$ avec a et b constantes

- On considère l'équation différentielle $(E_1) : y' = y - 3$ d'inconnue y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
 - Déterminer une solution particulière constante de l'équation (E_1) .
 - Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène $(E_1') : y' = y$.
 - En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) .
- Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_2) , d'inconnue y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$:
$$(E_2) : 14y' - 2y = 13y' + 6y + 10$$
- On considère l'équation différentielle $(E_3) : 4y' - 5y = 3$ d'inconnue y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'unique solution f de (E_3) qui vérifie la condition $f(3) = -2$.

1) a) Soit $f: x \mapsto k$ une fonction constante sur $\mathbb{R}$ solution de $y' = y - 3$.

Pour tout réel x , on a donc :

$$f'(x) = f(x) - 3 \Leftrightarrow 0 = k - 3 \Leftrightarrow k = 3$$

Donc $f: x \mapsto 3$

b) Les solutions de l'équation différentielle $y' = y$ sont les fonctions g définies sur $\mathbb{R}$

par : $g: x \mapsto C e^x$ avec $C \in \mathbb{R}$

c) Les solutions de l'équation différentielle

$$y' = y - 3$$

sont obtenues par superposition d'une solution de l'équation homogène $y' = y$ et d'une solution particulière de $y' = y - 3$

Elles sont donc définies sur $\mathbb{R}$ par:

$$f: x \mapsto C e^x + 3 \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

2) Soit l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$(E_2): 14y' - 2y = 13y' + 6y + 10$$

$$(E_2) \Leftrightarrow y' = 8y + 10 \Leftrightarrow \begin{cases} y' = ay + b \\ a = 8 \quad b = 10 \end{cases}$$

D'après un théorème les solutions de (E_2) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par:

$$f: x \mapsto C e^{ax} - \frac{b}{a} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

$$f: x \mapsto C e^{8x} - \frac{10}{8}$$

3) Soit l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$(E_3): 4y' - 5y = 3 \Leftrightarrow y' = \frac{5}{4}y + \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y' = ay + b \\ a = \frac{5}{4} \quad b = \frac{3}{4} \end{cases}$$

D'après un théorème les solutions de (E_3) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par:

$$f: x \mapsto C e^{\frac{5}{4}x} - \frac{3}{5} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

Si de plus $f(3) = -2$ alors :

$$C e^{\frac{15}{4}} - \frac{3}{5} = -2 \Leftrightarrow C e^{\frac{15}{4}} = -\frac{7}{10}$$

$$\Leftrightarrow C = -\frac{7}{10} \times e^{-\frac{15}{4}}$$

L'unique solution de (E_3) vérifiant $f(3) = -2$

est donc définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f: x \mapsto -\frac{7}{10} e^{-\frac{15}{4}} e^{\frac{5}{4}x} - \frac{3}{5}$$

Exercice 4 Équation différentielle $y' = ay + h$ avec h fonction

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{-x}$.

Vérifier que la fonction u est une solution de l'équation différentielle (E).

2. On considère l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$.

Résoudre l'équation différentielle (E') sur $\mathbb{R}$.

3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.



4. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

1) u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x :

$$u(x) = x e^{-x} = v(x) \times w(x)$$

$$v(x) = x \quad w(x) = e^{-x}$$

$$v'(x) = 1 \quad w'(x) = -e^{-x}$$

$$(v \times w)' = v'w + vw'$$

$$\text{donc } u'(x) = 1 \times e^{-x} + x(-e^{-x})$$

$$\text{donc } u'(x) + u(x) = e^{-x} - x e^{-x} + x e^{-x} = e^{-x}$$

donc u est solution de l'équation
différentielle $y' + y = e^{-x}$

2) Les solutions de l'équation différentielle

$y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -y$
sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = C e^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$ sont les fonctions définies

3) les solutions de l'équation différentielle
 $y' + y = e^{-x}$
sont obtenues par superposition d'une
solution de l'équation homogène $y' + y = 0$
et d'une solution particulière $y' + y = e^{-x}$
Ce sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$
par:
 $f(x) = C e^{-x} + x e^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

4) Soit g une fonction solution de
 $y' + y = e^{-x}$ c'est-à-dire que g
définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = C e^{-x} + x e^{-x}$

On a $g(0) = C \times e^{-0} + 0 \times e^{-0} = C$
Or $g(0) = 2$ alors $C = 2$

L'unique solution g du système différen-
-tiel $\begin{cases} y' + y = e^{-x} \\ g(0) = 2 \end{cases}$ est donc définie sur $\mathbb{R}$
par: $g(x) = 2 e^{-x} + x e^{-x}$

Exercice 5 Modèle de Verhulst, changement d'inconnue

Dans cet exercice on étudie une épidémie dans une population.

Au début de l'épidémie on constate que 0,01 % de la population est contaminé.

Pour t appartenant à $[0; 30]$, on note $y(t)$ le pourcentage de personnes touchées par la maladie après t jours.

On a donc $y(0) = 0,01$.

On admet que la fonction y ainsi définie sur $[0; 30]$ est dérivable, strictement positive et vérifie :

$$y' = 0,05y(10 - y)$$

Cette équation traduit un modèle de dynamique de population développé par **Pierre-François Verhulst** vers 1840.

1. On considère la fonction z définie sur l'intervalle $[0; 30]$ par $z = \frac{1}{y}$.

Démontrer que la fonction y satisfait aux conditions : $\begin{cases} y(0) = 0,01 \\ y' = 0,05y(10 - y) \end{cases}$

si et seulement si la fonction z satisfait aux conditions $\begin{cases} z(0) = 100 \\ z' = -0,5z + 0,05 \end{cases}$

2. a. Résoudre l'équation différentielle linéaire du premier ordre (E) : $z' = -0,5z + 0,05$.
b. Déterminer une expression de la fonction z qui est la solution de l'équation (E) vérifiant $z(0) = 100$.
c. En déduire une expression de la fonction y .
d. Calculer le pourcentage de la population infectée après 30 jours.
On donnera la valeur arrondie à l'entier le plus proche.

Soit y fonction strictement positive et dérivable sur $[0; 30]$ telle que :

$$\begin{cases} y' = 0,05y(10 - y) \\ y(0) = 0,01 \end{cases}$$

Poseons $z = \frac{1}{y}$, on a : $z' = -\frac{y'}{y^2}$

et donc :

$$\begin{cases} y' = 0,05y(10 - y) \\ y(0) = 0,01 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y'}{y^2} = 0,05 \left(\frac{10}{y} - 1 \right) \\ z(0) = \frac{1}{0,01} = 100 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -z' = 0,05(10z - 1) \\ z(0) = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z' = -0,5z + 0,05 \\ z(0) = 100 \end{cases}$$

$$2) a) z' = -0,5z + 0,05 \Leftrightarrow \begin{cases} z' = az + b \\ a = -0,5 \quad b = 0,05 \end{cases}$$

D'après un théorème les fonctions solutions de cette équation différentielle sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = C e^{ax} - \frac{b}{a}$$

$$f(x) = C e^{-0,5x} + 0,1 \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

b) Soit z solution de $z' = -0,5z + 0,05$
c'est-à-dire que z définie sur $\mathbb{R}$
par : $z(x) = C e^{-0,5x} + 0,1$

Si de plus $z(0) = 100$ alors on a :

$$z(0) = 100 \Leftrightarrow 100 = C + 0,1 \Leftrightarrow C = 99,9$$

L'unique solution du système différentiel

$$\begin{cases} z' = -0,5z + 0,05 \\ z(0) = 100 \end{cases} \text{ est donc définie sur } \mathbb{R}$$

$$\text{par : } z(x) = 99,9 e^{-0,5x} + 0,1$$

c) Puisqu'on a défini z comme l'inverse de m (supposée strictement positive), on

déduire de l'équivalence établie en 1) entre les deux systèmes différentiels et de la résolution du système différentiel de solution z en 2) b) que y est définie sur $[0; 30]$ par :

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{99,9e^{-0,5x} + 0,1}$$

d) le pourcentage de la population infectée après 30 jours est :

$$y(30) = \frac{1}{99,9e^{-0,5 \times 30} + 0,1} \approx 10\%$$