Histoire 1

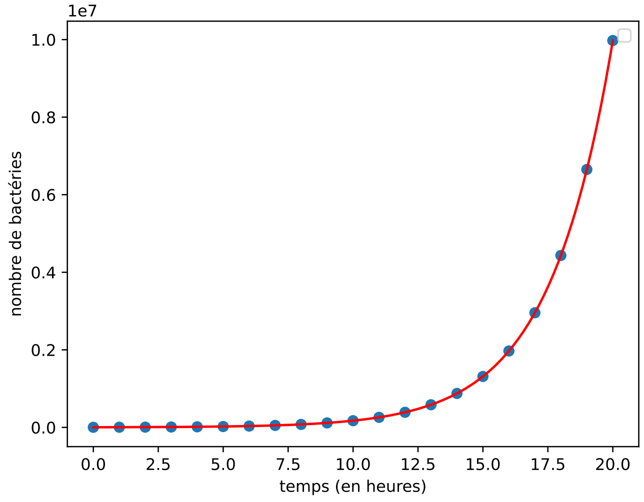
Thomas Malthus (1766 – 1834) propose un modèle où la population suit une évolution exponentielle (suite géométrique) et la capacité de production plutôt une évolution linéaire (suite arithmétique) ce qui l'amène à préconiser une limitation des naissances parce que la croissance exponentielle est plus rapide que la croissance linéaire.

1 Fonction exponentielle de base a

Activité 1

Considérons une population de bactéries qui augmente en moyenne de 50% par heure à partir d'un instant initial. On note $p(n)$ la population au bout de n heures. Initialement on a $p(0) = 3000$ bactéries.

1. Justifier que la suite p est géométrique et déterminer sa raison.
2. Soit n un entier naturel, exprimer $p(n)$ en fonction de n à l'aide d'une formule directe.
3. À l'aide d'un tableur ou d'un logiciel de géométrie dynamique, on peut ajuster le nuage de points de la suite (p_n) par la courbe d'une fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$. Pour un réel $x \geqslant 0$, $f(x)$ s'obtient en remplaçant n par x dans la formule directe de $p(n)$ trouvée à la question précédente.



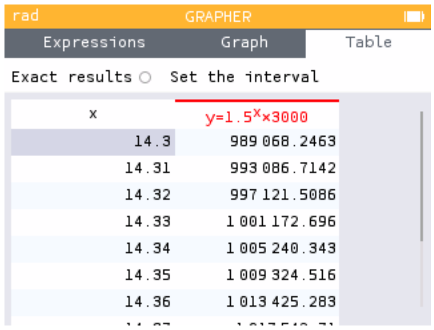
On peut alors estimer l'indice de la population de bactéries au bout d'un temps non entier, inaccessible par la suite.

1. Compléter le tableau :

	Type de modélisation	Antécent	Image
Suite géométrique	Discrète	n entier	$p(n) = \ldots$
Fonction exponentielle	Continue	x réel positif	$f(x) = \ldots$

2. A l'aide de la fonction f, estimer la population de bactéries après $1,25$ heures.

3. On donne ci-contre un tableau des valeurs de $f(x)$ pour x allant de $14,3$ à $14,36$ avec un pas de $0,01$. Au bout de combien de minutes la population de bactéries dépassera-t-elle le million ?



x	y=1.5^x×3000
14.3	989 068.2463
14.31	993 086.7142
14.32	997 121.5086
14.33	1 001 172.696
14.34	1 005 240.343
14.35	1 009 324.516
14.36	1 013 425.283

Définition 1

Soit a un réel strictement positif.
La fonction f qui à tout réel x positif associe a^x, est le prolongement à ces valeurs non entières positives de la suite (a^n) où n appartient à l'ensemble des entiers naturels.
Cette fonction est appelée **fonction exponentielle de base** a.

	Modélisation	Formule directe	Représentation graphique
Suite géométrique	Discrète	a^n avec n entier naturel	Nuage de points
Fonction exponentielle	Continue	a^x avec $x \geqslant 0$	Courbe « sans trous »

Méthode

Avec la calculatrice pour écrire a^x on utilise la touche d'exponentiation  ou ^.

Capacité 1 *Passer d'une modélisation discrète à une modélisation continue*

1. On considère l'indice des prix dans un pays qui va connaître une inflation de 2% par an à partir du premier Janvier 2025.

   a. *Modélisation discrète.*

   On note $p(n)$ l'indice des prix après n années avec n entier naturel. On part de $p(0) = 1$ au premier Janvier 2025.

   - Quelle est la nature de la suite p ?
   - Exprimer $p(n)$ en fonction de n entier naturel, à l'aide d'une formule directe.
   - Calculer une estimation par ce modèle de l'indice des prix au premier Janvier 2030.
   - Quel est le sens de variation de la suite p ? Justifier.

   b. *Modélisation continue.*

   On note $f(x)$ l'indice des prix x années après le premier Janvier 2025 avec x réel positif.

   - Déduire de la question précédente une expression de $f(x)$ pour x réel positif.
   - Calculer une estimation par ce modèle de l'indice des prix au premier juillet 2030.
   - Quel est le sens de variation de la fonction f ?

2. On considère l'indice des prix dans un pays qui va connaître une déflation de 2% par an à partir du premier Janvier 2025.

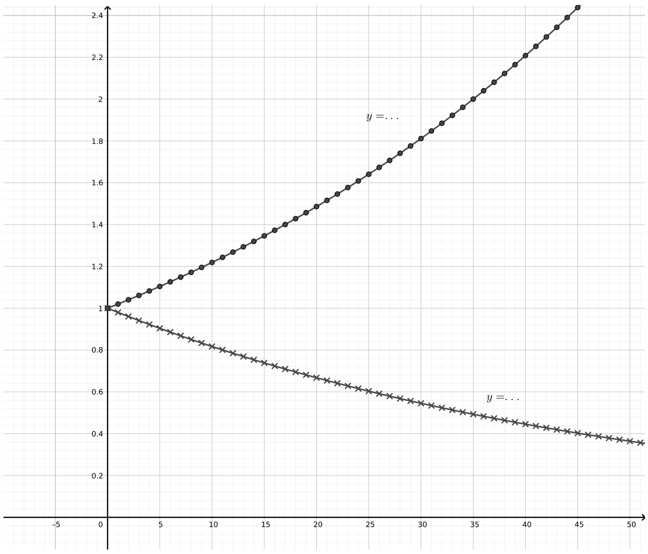
a. *Modélisation discrète.*
On note $q(n)$ l'indice des prix après n années avec n entier naturel. On part de $q(0) = 1$ au premier Janvier 2025.

- Quelle est la nature de la suite q ?
- Exprimer $q(n)$ en fonction de n entier naturel, à l'aide d'une formule directe.
- Calculer une estimation par ce modèle de l'indice des prix au premier Janvier 2030.
- Quel est le sens de variation de la suite q ? Justifier.

b. *Modélisation continue.*
On note $g(x)$ l'indice des prix x années après le premier Janvier 2025 avec x réel positif.

- Déduire de la question précédente une expression de $g(x)$ pour x réel positif.
- Calculer une estimation par ce modèle de l'indice des prix au premier juillet 2030.
- Quel est le sens de variation de la fonction g ?

3. Associer à chaque courbe ci-dessous la fonction f ou g.

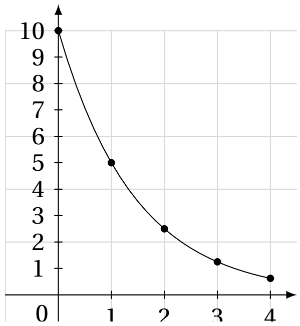


2 Sens de variation

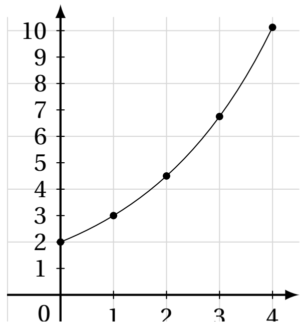
Propriété 1
Soit a un réel strictement positif, le sens de variation de la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $x \longmapsto a^x$ est le même que celui de la suite géométrique (a^n).

- ☞ Si $0 < a < 1$ alors la fonction $x \longmapsto a^x$ est **décroissante** sur $[0\,;+\infty[$.
- ☞ Si $a = 1$ alors la fonction $x \longmapsto a^x$ est **constante** sur $[0\,;+\infty[$, c'est la fonction $x \longmapsto 1$.
- ☞ Si $a > 1$ alors la fonction $x \longmapsto a^x$ est **croissante** sur $[0\,;+\infty[$.

$x \mapsto a^x$ est décroissante si $0 < a < 1$



$x \mapsto a^x$ est croissante si $1 < a$



Corollaire

Soit a et k deux réels **strictement positifs**.
La fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $x \mapsto k \times a^x$ a le même sens de variation que la fonction $x \mapsto a^x$.

Capacité 2 ***Déterminer le sens de variation d'une fonction exponentielle***

Compléter le tableau avec *croissant, décroissant* ou *constant.*

Fonction	Sens de variation sur $[0\,;+\infty[$
$x \mapsto 0,87^x$	...
$x \mapsto 2^x$	...
$x \mapsto 0,1 \times 1,01^x$	...
$x \mapsto 10^6 \times 0,99^x$	...
$x \mapsto \dfrac{0,6^x \times (0,6)^2}{0,6^{x+2}}$	...
$x \mapsto 0,3^x \times 4^x$	...

3 Propriétés algébriques

3.1 Règles de calcul

Propriété 2

Soit a un réel strictement positif, la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $x \mapsto a^x$ a les mêmes propriétés algébriques que les puissances entières.
Pour tous réels x et y positifs et tout entier naturel n :

☞ $a^x \times a^y = a^{x+y}$ ☞ $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ ☞ $\left(a^x\right)^n = a^{nx}$

Capacité 3

Soit a un réel strictement positif. Écrire chaque expression sous la forme a^k avec k réel positif.

1. $a^4 \times a^{3,2}$
2. $a^{10} \times a^{0,5}$
3. $a^{12,4} \times a^2$
4. $\left(a^{3,2}\right)^2$
5. $\left(a^{0,1}\right)^6$
6. $\left(a^3\right)^{2,2}$
7. $\dfrac{a^{3,4}}{a^3}$
8. $\dfrac{a^{11,9}}{a^7}$
9. $\dfrac{a^2}{a^{1,4}}$

3.2 Calcul de la racine $n^{\text{ième}}$

Propriété 3

Soit a un réel strictement positif et n un entier strictement positif.
Il existe un unique réel strictement positif x tel que $x^n = a$, c'est la racine $n^{\text{ième}}$ de a.
La racine $n^{\text{ième}}$ de a est égale à $x = a^{\frac{1}{n}}$.
En effet on a $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{n\times\frac{1}{n}} = a$.

Exemple 1

Soit a un réel strictement positif.

1. $a^{\frac{1}{2}}$ est la racine $2^{\text{ième}}$ de a c'est-à-dire que $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a$. On en déduit que c'est la racine carrée de a, définie dans les classes inférieures : on a donc $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.
2. $a^{\frac{1}{3}}$ est la racine $3^{\text{ième}}$ ou cubique de a. On rencontre parfois la notation $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$.

Capacité 4

1. Soit a un réel strictement positif. Écrire chaque expression sous la forme a^k avec k réel positif.

   a. $\left(a^{\frac{1}{12}}\right)^{12}$ **b.** $\left(\sqrt{a}\right)^3$ **c.** $\left(a^4\right)^{\frac{1}{4}}$

2. Calculer la valeur exacte de la racine cubique des entiers 27 et 125.
3. Un libraire vend des journaux. Il a constaté qu'en six mois le nombre de journaux vendus a baissé de 3%. Supposons que le taux d'évolution mensuelle du nombre de journaux vends ait été constant pendant six mois. Notons le t.

   a. Justifier que $(1+t)^6 = 0,97$.

   b. Calculer une valeur approchée de t à 10^{-2} près.

3.3 Application au calcul du taux moyen

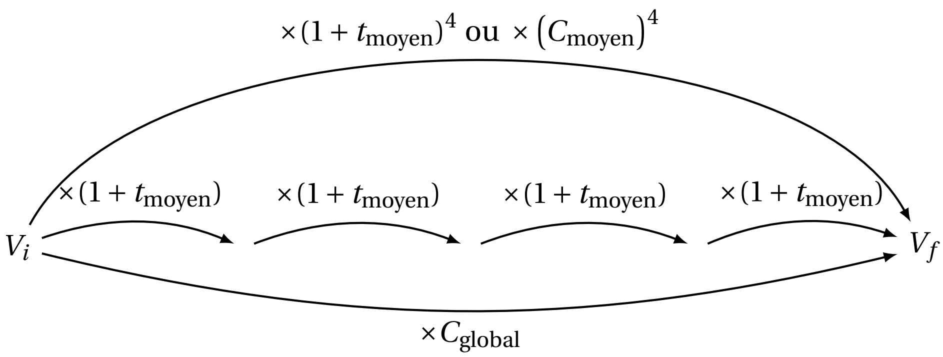
Définition 2

Le **taux d'évolution moyen** t_{moyen} d'une quantité qui passe d'une **valeur initiale** V_i à une **valeur finale** V_f sur n périodes est le taux qui, s'il était identique sur chaque période, permettrait de passer de V_i à V_f.

Méthode *Calcul du taux moyen*

- Étape 1 : d'abord on calcule le coefficient multiplicateur global $C_{\text{global}} = \dfrac{V_f}{V_i}$.
- Étape 2 : ensuite on calcule le coefficient multiplicateur moyen $C_{\text{moyen}} = \left(C_{\text{global}}\right)^{\frac{1}{n}}$.
- Étape 3 : ensuite on calcule le taux moyen $t_{\text{moyen}} = C_{\text{moyen}} - 1$.

Un exemple sur 4 périodes :



Capacité 5 *Calculer un taux moyen*

1. Entre le 1^er janvier 2012 et le 1^er janvier 2022, le prix d'un appartement est passé de 70500 € à 79534 €. Calculer le taux moyen d'évolution annuel de ce prix exprimé en pourcentage (arrondir au dixième).

2. En trois mois le prix d'une voiture a augmenté de 2 %. On cherche le taux moyen mensuel du prix d'évolution du prix de cette voiture. On note t ce taux. Quelle équation doit-on résoudre pour déterminer t ?

   a. $t^3 = 0,02$ **b.** $(1+t)^3 = 1,02$ **c.** $(1+t)^{90} = 1,02$.