Méthode 1 *Résolution graphique d'une équation ou d'une inéquation du type* $f(x) = k$ *ou* $f(x) > k$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

- Les solutions de **l'équation** $f(x) = k$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite Δ d'équation $y = k$. Ce sont les antécédents de k par la fonction f.

  Si la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite Δ n'ont pas de point d'intersection, alors cette équation n'a pas de solution.

- Les solutions de **l'inéquation** $f(x) < k$ sont les abscisses des points de la courbe situés en dessous de la droite Δ d'équation $y = k$.

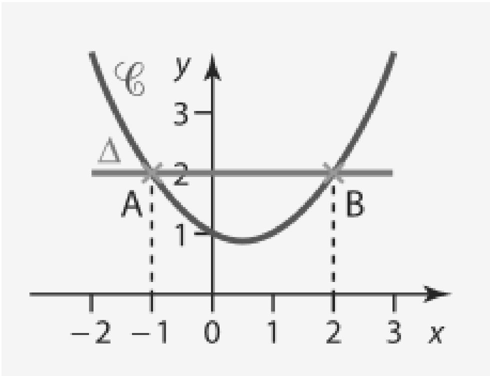
- Les solutions de **l'inéquation** $f(x) > k$ sont les abscisses des points de la courbe situés au-dessus de la droite Δ d'équation $y = k$.

  Autrement dit, pour résoudre graphiquement une inéquation, on regarde les abscisses des points de la courbe dont les ordonnées sont supérieures (inférieures) à k.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $I = [-2;3]$. Sa représentation graphique $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-contre.
La droite Δ d'équation $y = 2$ coupe $\mathscr{C}_f$ aux points A et B d'abscisses respectives -1 et 2.
Les solutions de l'équation $f(x) = 2$ sont les réels -1 et 2.
Les solutions de l'inéquation $f(x) < 2$ sont les réels strictement compris entre -1 et 2 :

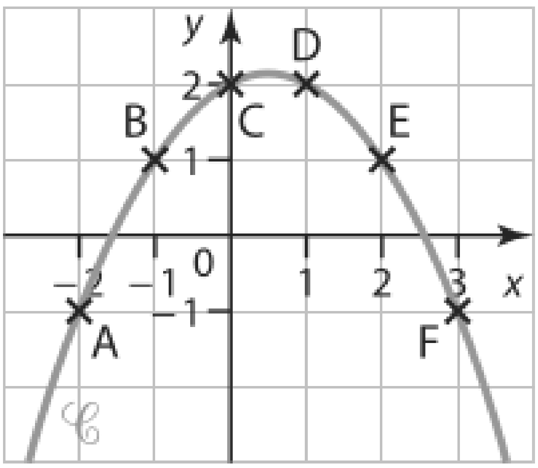
$$f(x) < 2 \quad \text{pour} \quad -1 < x < 2 \text{ c'est-à-dire } x \in]-1;2[$$



Application 1

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-2,5;3,5]$. Les points A, B, C, D, E de la courbe $\mathscr{C}_f$ ont des coordonnées entières. Compléter le tableau :

Équation / Inéquation	Ensemble des solutions
$f(x) = 2$	....
$f(x) \geqslant 2$	....
$f(x) < 2$	....
Antécédents de 1	....
$-1 < f(x) \leqslant 1$	....



Méthode 2 *Signe et sens de variation d'une fonction*

Signe d'une fonction

Pour déterminer le signe d'une fonction f à partir de sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$:

- $f(x) > 0$ sur les intervalles où les points de $\mathscr{C}_f$ sont **au-dessus** de l'axe des abscisses ;
- $f(x) < 0$ sur les intervalles où les points de $\mathscr{C}_f$ sont **en dessous** de l'axe des abscisses ;
- $f(x) = 0$ pour les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

On peut réunir ces informations dans un **tableau de signes**.

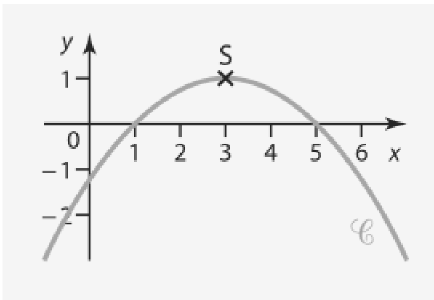
Tableau de variations

Pour établir le tableau de variations d'une fonction f à partir de $\mathscr{C}_f$:

- f est **croissante** sur les intervalles où la courbe « va vers le haut » quand x augmente ;
- f est **décroissante** sur les intervalles où la courbe « va vers le bas » quand x augmente.

Exemple

On souhaite déterminer graphiquement le signe de la fonction f représentée ci-contre.



- $f(x) = 0$ *pour* $x = 1$ *et* $x = 5$.
- *Sur* $]1;5[$, *la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses, donc* $f(x) > 0$.
- *Sur* $]-\infty;1[\cup]5;+\infty[$, *la courbe est en dessous de l'axe des abscisses, donc* $f(x) < 0$.

On synthétise dans le tableau de signes :

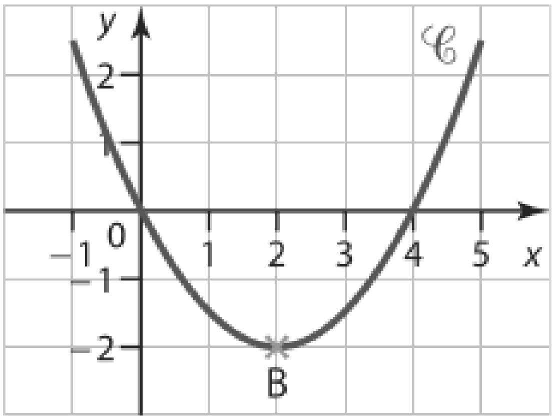
x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Le point S a pour coordonnées $(3;1)$, *donc la fonction* f *est* ***croissante*** *jusqu'à* $x = 3$ *puis* ***décroissante****. On en déduit le tableau de variations :*

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$			1		
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

Application 2

$\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-1;5]$.



1. Déterminer les antécédents de 0 par la fonction f.

....

2. Dresser le tableau de signes de f sur $[-1;5]$.

....

....

3. Déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ sur $[-1;5]$.

....

4. Décrire les variations de f sur $[-1;5]$.

....

....

5. Dresser le tableau de variations de f sur $[-1;5]$.

....

....

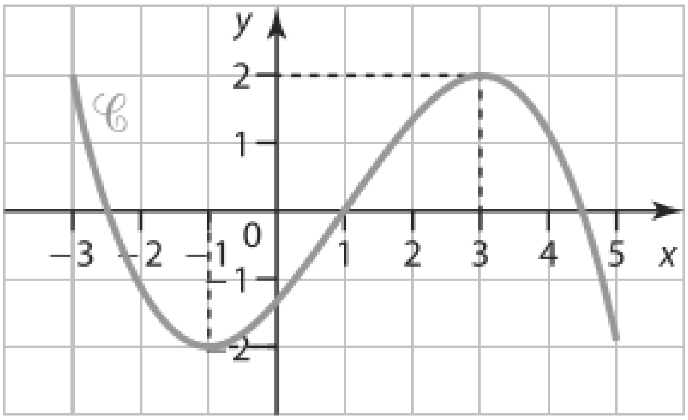
....

6. Déterminer un encadrement approché de f sur $[-1;5]$.

....

Application 3

$\mathscr{C}_g$ est la représentation graphique de la fonction g définie sur $[-3;5]$.



Dresser le tableau de variations de g sur $[-3;5]$.

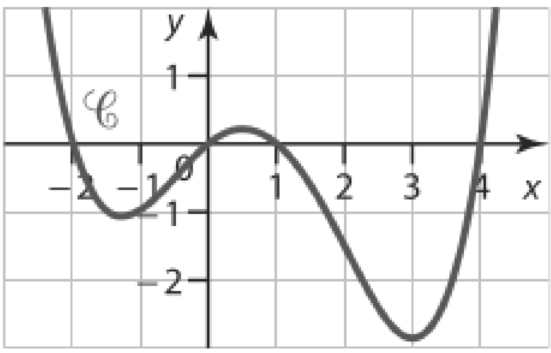
....

....

....

Application 4

$\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-2,3;4,2]$.



Dresser le tableau de signes de f sur $[-2,3;4,2]$.

....

....

....