Corrigé détaillé des capacités

Indépendance en probabilités – Première

Capacité – Utiliser l'indépendance de deux événements

On note :

$$D_1 : \text{« le composant 1 est défaillant avant un an »}$$

et

$$D_2 : \text{« le composant 2 est défaillant avant un an ».}$$

On sait que les événements D_1 et D_2 sont indépendants et que

$$\mathbb{P}(D_1) = \mathbb{P}(D_2) = 0{,}39.$$

Comme D_1 et D_2 sont indépendants,

$$\mathbb{P}(D_1 \cap D_2) = \mathbb{P}(D_1) \times \mathbb{P}(D_2) = 0{,}39 \times 0{,}39 = 0{,}1521.$$

1. Lorsque les deux composants sont montés en parallèle, le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Ainsi, l'événement « le circuit A est défaillant » est l'événement $D_1 \cap D_2$.

   $$\mathbb{P}(\text{A défaillant}) = \mathbb{P}(D_1 \cap D_2) = 0{,}1521.$$

   Conclusion : la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an est 0,1521.

2. Lorsque les deux composants sont montés en série, le circuit B est défaillant dès qu'au moins l'un des deux composants est défaillant. L'événement « le circuit B est défaillant » est donc $D_1 \cup D_2$.
   On utilise la formule :

   $$\mathbb{P}(D_1 \cup D_2) = \mathbb{P}(D_1) + \mathbb{P}(D_2) - \mathbb{P}(D_1 \cap D_2).$$

   Donc

   $$\mathbb{P}(\text{B défaillant}) = 0{,}39 + 0{,}39 - 0{,}1521 = 0{,}6279.$$

   Conclusion : la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an est 0,6279.

Capacité – Utiliser l'indépendance de deux événements (Sujet Zéro 2025 numéro 3)

On note :

$$A : \text{« le premier appel dure plus de cinq minutes »,}$$

et

$$B : \text{« le second appel dure plus de cinq minutes ».}$$

On sait que

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 0{,}3,$$

et que les durées des appels sont indépendantes.

1. **Affirmation 1 :**
   « La probabilité que les deux appels durent tous les deux plus de cinq minutes est égale à 0,09. »
   L'événement considéré est $A \cap B$. Comme A et B sont indépendants,
   $$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}09.$$
   Conclusion : l'affirmation 1 est **vraie**.
2. **Affirmation 2 :**
   « La probabilité qu'un appel exactement sur les deux dure plus de cinq minutes est égale à 0,21. »
   Avoir exactement un appel de plus de cinq minutes correspond à l'un des deux cas suivants :
   — le premier dure plus de cinq minutes et le second non ;
   — le premier ne dure pas plus de cinq minutes et le second oui.
   La probabilité qu'un appel ne dure *pas* plus de cinq minutes vaut
   $$1 - 0{,}3 = 0{,}7.$$
   Donc :
   $$\mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}3 \times 0{,}7 = 0{,}21$$
   et
   $$\mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right) = 0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}21.$$
   Ainsi,
   $$\mathbb{P}(\text{exactement un appel dure plus de cinq minutes}) = 0{,}21 + 0{,}21 = 0{,}42.$$
   Conclusion : l'affirmation 2 est **fausse**. La bonne valeur est 0,42.

Capacité – Identifier des expériences successives indépendantes

1. **Tirages successifs de boules dans une urne sans remise de la boule tirée : non.**
   Sans remise, la composition de l'urne change après chaque tirage. Les probabilités au deuxième tirage dépendent donc du résultat du premier tirage. Les expériences ne sont donc pas indépendantes.
2. **Tirages successifs de boules dans une urne avec remise de la boule tirée : oui.**
   Avec remise, on remet la boule tirée dans l'urne avant le tirage suivant. La composition de l'urne reste donc la même à chaque tirage. Les probabilités ne changent pas d'un tirage à l'autre : les expériences sont indépendantes.
3. **Pile ou face successifs avec une pièce : oui.**
   Le résultat d'un lancer n'influence pas le résultat du lancer suivant. Les lancers successifs sont donc indépendants.

Capacité – Modéliser une situation par une succession d'épreuves indépendantes et calculer des probabilités

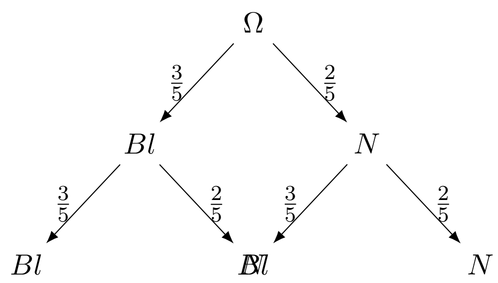
L'urne contient 3 jetons blancs et 2 jetons noirs. Les deux tirages sont effectués **avec remise**. On note :

$$Bl : \text{« obtenir un jeton blanc »}, \qquad N : \text{« obtenir un jeton noir »}.$$

Alors :

$$\mathbb{P}(Bl) = \frac{3}{5} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(N) = \frac{2}{5}.$$

1. L'hypothèse de l'énoncé qui permet d'affirmer que les deux tirages sont indépendants est : **les tirages sont effectués avec remise**. En effet, après le premier tirage, on remet le jeton dans l'urne, donc la composition de l'urne ne change pas.
2. Voici un arbre pondéré modélisant la situation :



3. Perdre 9 € correspond à obtenir deux jetons blancs.
   L'événement correspondant est donc $Bl \cap Bl$. Comme les tirages sont indépendants,

$$\mathbb{P}(Bl \cap Bl) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}.$$

   Conclusion : la probabilité de perdre 9 € est $\dfrac{9}{25}$.

4. Gagner 5 € correspond à obtenir deux jetons de couleurs différentes.
   Il y a alors deux cas :
   - blanc puis noir ;
   - noir puis blanc.

   Donc

$$\mathbb{P}(\text{gagner } 5\ e) = \mathbb{P}(Bl \cap N) + \mathbb{P}(N \cap Bl).$$

   Comme les tirages sont indépendants,

$$\mathbb{P}(Bl \cap N) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(N \cap Bl) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}.$$

   Ainsi,

$$\mathbb{P}(\text{gagner } 5\ e) = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25}.$$

   Conclusion : la probabilité de gagner 5 € est $\dfrac{12}{25}$.

5. On observe maintenant 10 joueurs, et l'énoncé précise que leurs parties sont effectuées indépendamment les unes des autres.

   Pour un joueur, la probabilité de gagner 5 € est $\frac{12}{25}$. Donc, pour un joueur, la probabilité de *ne pas* gagner 5 € est
   $$1 - \frac{12}{25} = \frac{13}{25}.$$

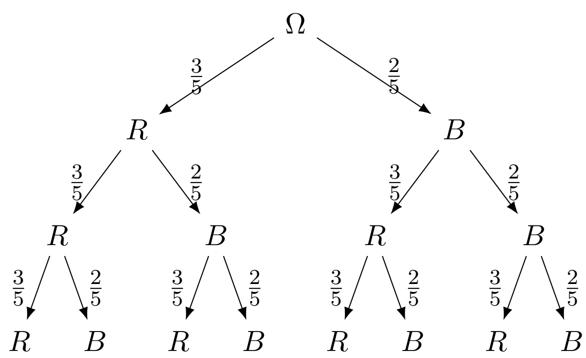
   a. N'avoir aucun joueur gagnant 5 € signifie que les 10 joueurs ne gagnent pas 5 €. Comme les parties sont indépendantes,
   $$\mathbb{P}\left(\text{aucun joueur gagnant}\right) = \left(\frac{13}{25}\right)^{10}.$$

   b. Avoir au moins un joueur gagnant 5 € est l'événement contraire de « n'avoir aucun joueur gagnant 5 € ».
   Ainsi,
   $$\mathbb{P}\left(\text{au moins un joueur gagnant}\right) = 1 - \left(\frac{13}{25}\right)^{10}.$$

Capacité – Répétition d'expériences aléatoires identiques et indépendantes

La cible comporte 5 secteurs superposables : 3 secteurs rouges et 2 secteurs bleus. À chaque concert,
$$\mathbb{P}\left(R\right) = \frac{3}{5} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}\left(B\right) = \frac{2}{5}.$$
Comme les tirages effectués pour les concerts successifs sont mutuellement indépendants, les probabilités restent les mêmes d'un concert à l'autre.

1. L'arbre pondéré complété est le suivant :



2. Avoir les cheveux rouges pour les trois concerts correspond à la liste de résultats RRR. Comme les tirages sont indépendants,
   $$\mathbb{P}\left(RRR\right) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}.$$

   Conclusion : la probabilité cherchée est $\frac{27}{125}$.

3. Avoir les cheveux de la même couleur pour les trois concerts signifie :
   — soit rouges pour les trois concerts ;

— soit bleus pour les trois concerts.

Les deux cas sont incompatibles, donc

$$\mathbb{P}\left(\text{même couleur pour les trois concerts}\right) = \mathbb{P}\left(RRR\right) + \mathbb{P}\left(BBB\right).$$

Or

$$\mathbb{P}\left(RRR\right) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}\left(BBB\right) = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}.$$

Donc

$$\mathbb{P}\left(\text{même couleur pour les trois concerts}\right) = \frac{27}{125} + \frac{8}{125} = \frac{35}{125} = \frac{7}{25}.$$

Conclusion : la probabilité cherchée est $\frac{7}{25}$.

4. Avoir la couleur rouge pour au moins un concert est l'événement contraire de « avoir les cheveux bleus pour les trois concerts ».
   Donc

$$\mathbb{P}\left(\text{au moins un concert en rouge}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(BBB\right) = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^3.$$

   Ainsi,

$$\mathbb{P}\left(\text{au moins un concert en rouge}\right) = 1 - \frac{8}{125} = \frac{117}{125}.$$

   Conclusion : la probabilité cherchée est $\frac{117}{125}$.