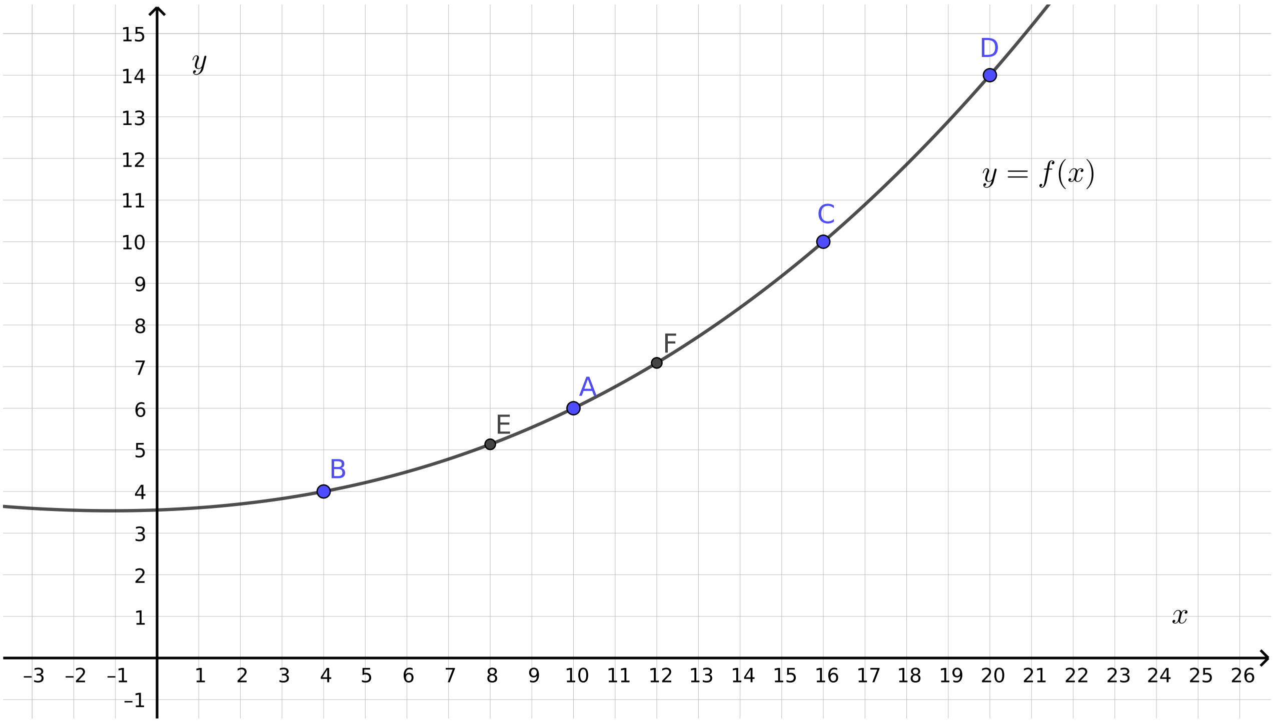
Capacité 1 *Calculer un taux de variation et faire tendre les sécantes vers une position limite*

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont on donne une partie de la représentation graphique ci-dessous dans un repère du plan.

La courbe de f passe par les points $A\,(10\,;\,6)$, $B\,(4\,;\,4)$, $C\,(16\,;\,10)$, $D\,(20\,;\,14)$, $E\left(8\,;\,\dfrac{77}{15}\right)$ et $F\left(12\,;\,\dfrac{319}{45}\right)$.



1. Le taux de variation de f entre a et b se calcule avec la formule :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

C'est le coefficient directeur de la sécante qui relie les deux points de la courbe.

a	b	Taux de variation de f entre a et b	Sécante et coefficient directeur
4	10	$\dfrac{f(10)-f(4)}{10-4}=\dfrac{6-4}{6}=\dfrac{1}{3}$	(AB) : $\dfrac{1}{3}$
8	10	$\dfrac{f(10)-f(8)}{10-8}=\dfrac{6-\frac{77}{15}}{2}=\dfrac{13}{30}$	(EA) : $\dfrac{13}{30}$
12	10	$\dfrac{f(10)-f(12)}{10-12}=\dfrac{6-\frac{319}{45}}{-2}=\dfrac{49}{90}$	(FA) : $\dfrac{49}{90}$
16	10	$\dfrac{f(10)-f(16)}{10-16}=\dfrac{6-10}{-6}=\dfrac{2}{3}$	(CA) : $\dfrac{2}{3}$
20	10	$\dfrac{f(10)-f(20)}{10-20}=\dfrac{6-14}{-10}=\dfrac{4}{5}$	(DA) : $\dfrac{4}{5}$

2. La droite Δ passe par $A\,(10\,;6)$ et a pour coefficient directeur $\frac{1}{2}$.

Dire que son coefficient directeur vaut $\frac{1}{2}$ signifie que, quand x augmente de 2, l'ordonnée y augmente de 1.

On peut écrire une équation sous la forme :

$$y = \frac{1}{2}x + p.$$

Comme la droite passe par $A\,(10\,;6)$, on remplace x par 10 et y par 6 :

$$6 = \frac{1}{2} \times 10 + p.$$

Donc :

$$6 = 5 + p,$$

d'où :

$$p = 1.$$

Une équation de la droite Δ est donc :

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x + 1}.$$

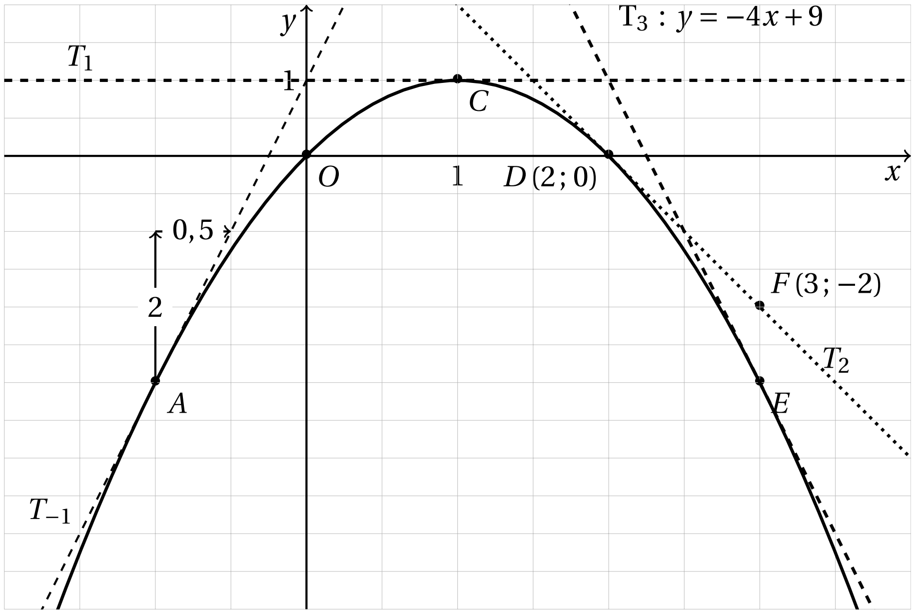
Pour tracer cette droite, on peut placer le point $A\,(10\,;6)$, puis utiliser le coefficient directeur $\frac{1}{2}$: à partir de A, on avance de 2 carreaux vers la droite et on monte de 1 carreau.

3. Lorsque le point M se rapproche du point A sur la courbe, la sécante (AM) change de position. Elle se rapproche de plus en plus de la droite Δ.

La droite Δ apparaît donc comme la position limite des sécantes (AM) lorsque M se rapproche de A. On peut dire que Δ est la tangente à la courbe au point A.

Les coefficients directeurs des sécantes proches de A se rapprochent du coefficient directeur de Δ, c'est-à-dire de $\frac{1}{2}$.

Capacité 2 ***Déterminer graphiquement un nombre dérivé***



Sur le graphique précédent, on a représenté la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $[-2;4]$ par :

$$f(x) = -x^2 + 2x$$

On admet que f est dérivable en -1, 0, 1, 2 et 3 et on a tracé les tangentes à $\mathscr{C}_f$:

- T_1 au point $C(1;1)$;
- T_{-1} au point $A(-1;-3)$;
- T_2 au point $D(2;0)$;
- T_3 au point $E(3;-3)$;

Sur le graphique, le nombre dérivé en un point est le coefficient directeur de la tangente à la courbe en ce point.

- Pour déterminer $f'(1)$, on regarde la tangente T_1 au point $C(1;1)$.
- Pour déterminer $f'(-1)$, on regarde la tangente T_{-1} au point $A(-1;-3)$.
- Pour déterminer $f'(2)$, on regarde la tangente T_2 au point $D(2;0)$.
- Pour déterminer $f'(3)$, on regarde la tangente T_3 au point $E(3;-3)$.

Nombre dérivé	Coefficient directeur de la droite	Calcul ou lecture graphique
$f'(1)$	Coefficient directeur de T_1 : 0	La tangente T_1 est horizontale. Une droite horizontale a pour coefficient directeur 0. Donc $\boxed{f'(1)=0}$.
$f'(-1)$	Coefficient directeur de T_{-1} : 4	Sur le graphique, on lit un déplacement horizontal de 0,5 et un déplacement vertical de 2. Donc le coefficient directeur est $\dfrac{2}{0,5}=4$. Ainsi $\boxed{f'(-1)=4}$.
$f'(2)$	Coefficient directeur de T_2 : -2	La tangente T_2 passe par $D(2;0)$ et par $F(3;-2)$. Son coefficient directeur vaut $\dfrac{-2-0}{3-2}=-2$. Donc $\boxed{f'(2)=-2}$.
$f'(3)$	Coefficient directeur de T_3 : -4	Une équation de T_3 est donnée sur le graphique : $y=-4x+9$. Le coefficient directeur est donc -4. Ainsi $\boxed{f'(3)=-4}$.

Capacité 3 ***Déterminer une équation de tangente à partir de la formule***

On considère une fonction f définie et dérivable en tout réel a.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère du plan.

1. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 est :

$$y=-3x+4.$$

Le coefficient directeur de cette tangente est -3. Or le nombre dérivé est le coefficient directeur de la tangente. Donc :

$$\boxed{f'(2)=-3}.$$

Pour trouver $f(2)$, on utilise le fait que le point de la courbe d'abscisse 2 est aussi sur la tangente. On remplace donc x par 2 dans l'équation de la tangente :

$$y=-3\times 2+4.$$

Donc :

$$y=-6+4=-2.$$

Ainsi :

$$\boxed{f(2)=-2}.$$

2. On a :

$$f(-3)=9 \quad \text{et} \quad f'(-3)=4.$$

La tangente cherchée passe par le point de la courbe d'abscisse -3. Ce point a pour coordonnées :

$$(-3\,;9)\,.$$

De plus, son coefficient directeur est $f'(-3)$, c'est-à-dire 4.

On utilise la formule de l'équation de la tangente :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Ici, $a=-3$, $f(-3)=9$ et $f'(-3)=4$. On obtient :

$$y = 4\big(x-(-3)\big)+9.$$

Donc :

$$y = 4(x+3)+9.$$

En développant :

$$y = 4x+12+9.$$

Une équation de la tangente est donc :

$$\boxed{y = 4x+21}.$$

Capacité 4 *Déterminer une équation de tangente par la formule et un nombre dérivé par lecture graphique*

1. On sait que :

$$f(2)=5 \quad \text{et} \quad f'(2)=-1.$$

Le point de contact entre la courbe et la tangente a pour abscisse 2 et pour ordonnée 5. La tangente passe donc par le point de coordonnées :

$$(2\,;5)\,.$$

Son coefficient directeur est le nombre dérivé $f'(2)$, donc son coefficient directeur vaut -1.

On utilise la formule :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Ici, $a=2$, $f(2)=5$ et $f'(2)=-1$. Donc :

$$y = -1(x-2)+5.$$

On simplifie :

$$y = -x+2+5.$$

Donc :

$$y = -x+7.$$

La bonne réponse est donc :

$$\boxed{\textbf{b. } y = -x+7}.$$

2. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A\left(1\,;\dfrac{4}{3}\right)$ passe aussi par le point $B\left(0\,;-\dfrac{5}{3}\right)$.

Le nombre dérivé $f'(1)$ est le coefficient directeur de cette tangente.

On calcule donc le coefficient directeur de la droite (AB) :

$$\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{\frac{4}{3} - \left(-\frac{5}{3}\right)}{1-0}.$$

On calcule le numérateur :

$$\frac{4}{3} - \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{9}{3} = 3.$$

Donc :

$$\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{3}{1} = 3.$$

Le coefficient directeur de la tangente est donc 3. Ainsi :

$$\boxed{f'(1) = 3}.$$

La bonne réponse est donc :

$$\boxed{\textbf{d. } f'(1) = 3}.$$