Corrigé — Probabilités conditionnelles (arbres)

Exercice 1 *Sujet Zéro n° 3*

On note R : « randonnée », C : « cross », L : « licencié ».
Données :

$$\mathbb{P}(R) = 0{,}90, \qquad \mathbb{P}(C) = 0{,}10, \qquad \mathbb{P}_R(L) = 0{,}05, \qquad \mathbb{P}_C(L) = 0{,}40.$$

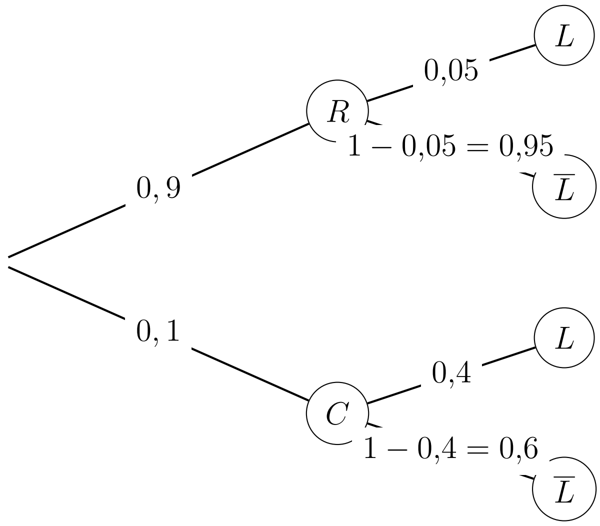
1. Par simple lecture de l'énoncé, indiquer :
   (a) La probabilité que le participant interrogé soit licencié dans un club sachant qu'il a choisi la randonnée.

   $$\mathbb{P}_R(L) = 0{,}05.$$

   (b) La probabilité que le participant interrogé soit licencié dans un club sachant qu'il a choisi le cross.

   $$\mathbb{P}_C(L) = 0{,}40.$$

2. Représenter la situation par un arbre de probabilité.



3. (a) Déterminer la probabilité que le participant interrogé ait choisi le cross et soit licencié dans un club.
   On calcule une probabilité d'intersection « par un chemin » :

   $$\mathbb{P}(C \cap L) = \mathbb{P}(C) \times \mathbb{P}_C(L) = 0{,}10 \times 0{,}40 = 0{,}04.$$

   (b) Vérifier que la probabilité que le participant interrogé soit licencié dans un club est égale à $\dfrac{850}{10000}$, soit 8,5%.
   Par la formule des probabilités totales (ou somme des chemins menant à L) :

   $$\mathbb{P}(L) = \mathbb{P}(R \cap L) + \mathbb{P}(C \cap L) = \mathbb{P}(R)\,\mathbb{P}_R(L) + \mathbb{P}(C)\,\mathbb{P}_C(L)\,.$$

   Donc

   $$\mathbb{P}(L) = 0{,}90 \times 0{,}05 + 0{,}10 \times 0{,}40 = 0{,}045 + 0{,}04 = 0{,}085 = \frac{850}{10000}.$$

4. Le journaliste interroge un participant licencié dans un club. Déterminer la probabilité que ce participant ait choisi le cross. L'intuition du journaliste est-elle correcte ?
   On cherche $\mathbb{P}_L(C)$, c'est-à-dire $\mathbb{P}_L(C)$:

$$\mathbb{P}_L(C) = \frac{\mathbb{P}(C \cap L)}{\mathbb{P}(L)} = \frac{0{,}04}{0{,}085} = \frac{40}{85} = \frac{8}{17} \approx 0{,}4706.$$

   Ainsi, sachant que le participant est licencié, il a choisi le cross avec une probabilité d'environ 47,1%.
   De plus,

$$\mathbb{P}_L(R) = 1 - \mathbb{P}_L(C) = 1 - \frac{8}{17} = \frac{9}{17} \approx 52{,}9\%.$$

   Donc, parmi les licenciés, la randonnée reste (légèrement) plus probable que le cross : l'intuition selon laquelle « licencié $\Rightarrow$ plutôt cross » n'est pas confirmée.

Exercice 2

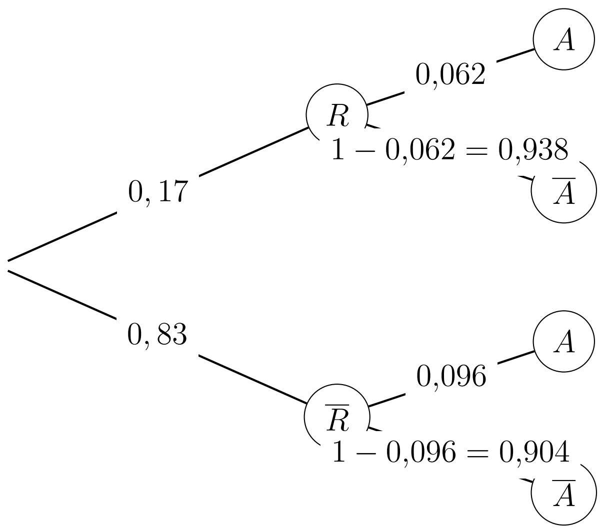
On note R : « zone rurale », $\overline{R}$: « zone urbaine », A : « allergie alimentaire ».
Données :

$$\mathbb{P}(R) = 0{,}17, \qquad \mathbb{P}\left(\overline{R}\right) = 0{,}83, \qquad \mathbb{P}_R(A) = 0{,}062, \qquad \mathbb{P}_{\overline{R}}(A) = 0{,}096.$$

1. D'après l'énoncé quelle est la valeur de la probabilité conditionnelle notée $\mathbb{P}_{\overline{R}}(A)$?
   L'énoncé indique : « parmi les enfants vivant en zone urbaine, 9,6% sont atteints », donc

$$\mathbb{P}_{\overline{R}}(A) = 0{,}096.$$

2. Recopier et compléter l'arbre de probabilité.



3. (a) Calculer la probabilité que l'enfant interrogé habite en zone rurale et soit atteint d'allergie alimentaire.

$$\mathbb{P}(R \cap A) = \mathbb{P}(R) \times \mathbb{P}_R(A) = 0{,}17 \times 0{,}062 = 0{,}01054.$$

(b) Montrer que la probabilité que l'enfant interrogé soit atteint d'une allergie alimentaire est égale à 0,09022.

Par somme des chemins menant à A :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(R \cap A) + \mathbb{P}\left(\overline{R} \cap A\right) = \mathbb{P}(R)\,\mathbb{P}_R(A) + \mathbb{P}\left(\overline{R}\right)\mathbb{P}_{\overline{R}}(A)\,.$$

Donc

$$\mathbb{P}(A) = 0{,}17 \times 0{,}062 + 0{,}83 \times 0{,}096 = 0{,}01054 + 0{,}07968 = 0{,}09022.$$

Exercice 3

On note A : « aiguille produite sur le site A », B : « aiguille produite sur le site B », et D : « aiguille défectueuse ».

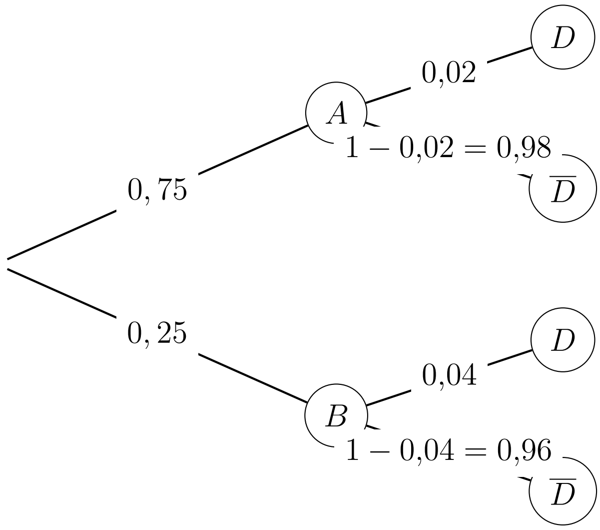
Données :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{4} = 0{,}75, \qquad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{4} = 0{,}25, \qquad \mathbb{P}_A(D) = 0{,}02, \qquad \mathbb{P}_B(D) = 0{,}04.$$

1. Donner la valeur de la probabilité de l'évènement A que l'on notera $P(A)$.

$$\mathbb{P}(A) = 0{,}75.$$

2. Recopier et compléter sur la copie l'arbre de probabilités en indiquant les probabilités sur les branches.



3. Quelle est la probabilité que l'aiguille ait un défaut et provienne du site A ?

$$\mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(D) = 0{,}75 \times 0{,}02 = 0{,}015.$$

4. Montrer que $P(D) = 0{,}025$.

Par somme des chemins menant à D :

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(A \cap D) + \mathbb{P}(B \cap D) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}_A(D) + \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}_B(D)\,.$$

Donc

$$\mathbb{P}(D) = 0{,}75 \times 0{,}02 + 0{,}25 \times 0{,}04 = 0{,}015 + 0{,}01 = 0{,}025.$$

5. Après inspection, l'aiguille choisie se révèle défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle ait été produite sur le site A ?

On cherche $\mathbb{P}_D(A) = \mathbb{P}_D(A)$:

$$\mathbb{P}_D(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap D)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{0{,}015}{0{,}025} = 0{,}6 = \frac{3}{5}.$$