

## Capacité 1 *Passer d'une modélisation discrète à une modélisation continue*

1. On considère une inflation de 2 % par an.

(a) *Modélisation discrète.*

Chaque année, l'indice est multiplié par  $1 + \frac{2}{100} = 1,02$ . La suite  $p$  est donc une suite **géométrique** de premier terme  $p_0 = 1$  et de raison 1,02.

Pour tout entier naturel  $n$  :

$$p_n = p_0 \times 1,02^n = 1,02^n.$$

Le premier janvier 2030 est situé 5 années après le premier janvier 2025. On calcule donc :

$$p_5 = 1,02^5 \approx 1,1041.$$

Ainsi, l'indice des prix au premier janvier 2030 est estimé à environ 1,104, c'est-à-dire une hausse globale d'environ 10,4 % par rapport à l'indice initial.

La suite  $p$  est **croissante**, car sa raison est strictement supérieure à 1 et son premier terme est strictement positif.

(b) *Modélisation continue.*

On prolonge la formule précédente aux valeurs réelles positives de  $x$  :

$$f(x) = 1,02^x.$$

Le premier juillet 2030 est situé 5,5 années après le premier janvier 2025. On calcule donc :

$$f(5,5) = 1,02^{5,5} \approx 1,1151.$$

L'indice des prix au premier juillet 2030 est donc estimé à environ 1,115.

La fonction  $f$  est **croissante** sur  $[0; +\infty[$ , car sa base 1,02 est strictement supérieure à 1.

2. On considère maintenant une déflation de 2 % par an.

(a) *Modélisation discrète.*

Chaque année, l'indice est multiplié par  $1 - \frac{2}{100} = 0,98$ . La suite  $q$  est donc une suite **géométrique** de premier terme  $q_0 = 1$  et de raison 0,98.

Pour tout entier naturel  $n$  :

$$q_n = q_0 \times 0,98^n = 0,98^n.$$

Le premier janvier 2030 est situé 5 années après le premier janvier 2025. On calcule donc :

$$q_5 = 0,98^5 \approx 0,9039.$$

Ainsi, l'indice des prix au premier janvier 2030 est estimé à environ 0,904, c'est-à-dire une baisse globale d'environ 9,6 % par rapport à l'indice initial.

La suite  $q$  est **décroissante**, car sa raison est strictement comprise entre 0 et 1 et son premier terme est strictement positif.

(b) *Modélisation continue.*

On prolonge la formule précédente aux valeurs réelles positives de  $x$  :

$$g(x) = 0,98^x.$$

Le premier juillet 2030 est situé 5,5 années après le premier janvier 2025. On calcule donc :

$$g(5,5) = 0,98^{5,5} \approx 0,8948.$$

L'indice des prix au premier juillet 2030 est donc estimé à environ 0,895.

La fonction  $g$  est **décroissante** sur  $[0; +\infty[$ , car sa base 0,98 est strictement comprise entre 0 et 1.

3. La fonction  $f : x \mapsto 1,02^x$  est associée à la courbe **croissante**. La fonction  $g : x \mapsto 0,98^x$  est associée à la courbe **décroissante**.

### **Capacité 2 Déterminer le sens de variation d'une fonction exponentielle**

Fonction	Sens de variation sur $[0; +\infty[$	Justification
$x \mapsto 0,87^x$	décroissant	La base 0,87 est strictement comprise entre 0 et 1.
$x \mapsto 2^x$	croissant	La base 2 est strictement supérieure à 1.
$x \mapsto 0,1 \times 1,01^x$	croissant	Le coefficient 0,1 est strictement positif, donc la fonction a le même sens de variation que $x \mapsto 1,01^x$ . Or $1,01 > 1$ .
$x \mapsto 10^6 \times 0,99^x$	décroissant	Le coefficient $10^6$ est strictement positif, donc la fonction a le même sens de variation que $x \mapsto 0,99^x$ . Or $0 < 0,99 < 1$ .
$x \mapsto \frac{0,6^x \times (0,6)^2}{0,6^{x+2}}$	constant	On a $0,6^x \times (0,6)^2 = 0,6^{x+2}$ , donc la fonction est égale à 1 pour tout $x \geq 0$ .
$x \mapsto 0,3^x \times 4^x$	croissant	On a $0,3^x \times 4^x = (0,3 \times 4)^x = 1,2^x$ . Or $1,2 > 1$ .

### **Capacité 3 Utiliser le sens de variation (Sujet Zéro 2025 numéro 3)**

La fonction est définie par :

$$f(t) = 1,1^t,$$

où  $f(t)$  est exprimée en milliers de bactéries par millilitre.

 **Affirmation 1 : vraie.**

La base de la fonction exponentielle est 1,1. Comme  $1,1 > 1$ , la fonction  $t \mapsto 1,1^t$  est

croissante sur  $[0; +\infty[$ .

 **Affirmation 2 : vraie.**

Deux heures après le prélèvement, on a :

$$f(2) = 1,1^2 = 1,21.$$

La concentration est donc égale à 1,21 millier de bactéries par millilitre, soit 1 210 bactéries par millilitre.

Le seuil maximal autorisé est de 1 500 bactéries par millilitre, c'est-à-dire 1,5 millier de bactéries par millilitre. Comme

$$1,21 < 1,5,$$

la concentration deux heures après le prélèvement est inférieure au seuil maximal autorisé.

 **Capacité 4**

Soit  $a$  un réel strictement positif.

Expression	Calcul	Résultat sous la forme $a^k$
$a^4 \times a^{3,2}$	$a^{4+3,2}$	$a^{7,2}$
$a^{10} \times a^{0,5}$	$a^{10+0,5}$	$a^{10,5}$
$a^{12,4} \times a^2$	$a^{12,4+2}$	$a^{14,4}$
$(a^{3,2})^2$	$a^{3,2 \times 2}$	$a^{6,4}$
$(a^{0,1})^6$	$a^{0,1 \times 6}$	$a^{0,6}$
$(a^3)^{2,2}$	$a^{3 \times 2,2}$	$a^{6,6}$
$\frac{a^{3,4}}{a^3}$	$a^{3,4-3}$	$a^{0,4}$
$\frac{a^{11,9}}{a^7}$	$a^{11,9-7}$	$a^{4,9}$
$\frac{a^2}{a^{1,4}}$	$a^{2-1,4}$	$a^{0,6}$

 **Capacité 5**

1. Soit  $a$  un réel strictement positif. On écrit chaque expression sous la forme  $a^k$ .

a)

$$\left(a^{\frac{1}{12}}\right)^{12} = a^{\frac{1}{12} \times 12} = a^1 = a.$$

b)

$$\left(\sqrt{a}\right)^3 = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3 = a^{\frac{1}{2} \times 3} = a^{\frac{3}{2}}.$$

c)

$$(a^4)^{\frac{1}{4}} = a^{4 \times \frac{1}{4}} = a^1 = a.$$

2. La racine cubique de 27 est le nombre positif dont le cube vaut 27. Comme

$$3^3 = 27,$$

on a :

$$\sqrt[3]{27} = 3.$$

De même, comme

$$5^3 = 125,$$

on a :

$$\sqrt[3]{125} = 5.$$

3. Le nombre de journaux vendus baisse de 3 % en six mois.

a) Le coefficient multiplicateur global correspondant à une baisse de 3 % est :

$$1 - \frac{3}{100} = 0,97.$$

Si le taux mensuel constant est  $t$ , alors chaque mois le nombre de journaux vendus est multiplié par  $1 + t$ . Au bout de six mois, le coefficient multiplicateur global est donc :

$$(1 + t)^6.$$

On doit donc avoir :

$$(1 + t)^6 = 0,97.$$

b) À partir de l'équation précédente :

$$1 + t = 0,97^{\frac{1}{6}}.$$

Donc :

$$t = 0,97^{\frac{1}{6}} - 1.$$

Avec l'aide au calcul :

$$0,97^{\frac{1}{6}} \approx 0,9949.$$

Ainsi :

$$t \approx 0,9949 - 1 = -0,0051.$$

Le taux mensuel est donc environ égal à  $-0,0051$ , c'est-à-dire environ  $-0,51\%$ .



## Capacité 6 Calculer un taux moyen

1. Entre le premier janvier 2012 et le premier janvier 2022, il s'écoule 10 années.

Le coefficient multiplicateur global est :

$$C_{\text{global}} = \frac{79\,534}{70\,500} \approx 1,1281.$$

On cherche le coefficient multiplicateur annuel moyen  $C_{\text{moyen}}$  tel que :

$$C_{\text{moyen}}^{10} = C_{\text{global}}.$$

Donc :

$$C_{\text{moyen}} = \left( \frac{79\,534}{70\,500} \right)^{\frac{1}{10}} \approx 1,01213.$$

Le taux moyen annuel est donc :

$$t_{\text{moyen}} = C_{\text{moyen}} - 1 \approx 1,01213 - 1 = 0,01213.$$

En pourcentage :

$$t_{\text{moyen}} \approx 1,213\%.$$

Arrondi au dixième, le taux moyen annuel d'évolution est donc d'environ :

$$\boxed{1,2\%}.$$

2. En trois mois, le prix de la voiture augmente de 2%. Le coefficient multiplicateur global est donc :

$$1 + \frac{2}{100} = 1,02.$$

Si  $t$  est le taux mensuel moyen, alors chaque mois le prix est multiplié par  $1 + t$ . Sur trois mois, le coefficient multiplicateur est donc :

$$(1 + t)^3.$$

On doit résoudre :

$$\boxed{(1 + t)^3 = 1,02}.$$

La bonne réponse est donc la réponse **b**.