Corrigé détaillé

Ce corrigé reprend les raisonnements attendus en utilisant les propriétés du cours : dérivée des fonctions usuelles, dérivée d'une somme, dérivée du produit par une constante, et lien entre signe de la dérivée et sens de variation.

Activité 1 *Des propriétés locales de la dérivée aux propriétés globales*

1. Le point C a pour coordonnées $(-2\,;4)$ et la tangente d_2 passe par l'origine $O\,(0\,;0)$.

   Son coefficient directeur est donc :
   $$\frac{4-0}{-2-0}=\frac{4}{-2}=-2.$$
   Comme le nombre dérivé $f'(-2)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse -2, on obtient :
   $$\boxed{f'(-2)=-2}.$$
   La droite d_2 passe par l'origine et a pour coefficient directeur -2, donc :
   $$\boxed{d_2 : y=-2x}.$$

2. Le point E a pour coordonnées $(4\,;1)$ et la tangente d_4 passe par le point $P\,(3\,;-3)$.

   Son coefficient directeur est :
   $$\frac{1-(-3)}{4-3}=\frac{4}{1}=4.$$
   Donc :
   $$\boxed{f'(4)=4}.$$
   La tangente d_4 passe par $E\,(4\,;1)$ et a pour coefficient directeur 4. Une équation de cette droite est donc :
   $$y-1=4(x-4).$$
   Ainsi :
   $$y-1=4x-16$$
   puis :
   $$\boxed{d_4 : y=4x-15}.$$

3. On admet que f est croissante sur $]-\infty\,;-4]$ et sur $[2\,;+\infty[$.

   Sur le graphique, on lit que $f(-4)\approx 6{,}33$ et $f(2)\approx -2{,}67$.

   Le tableau de variations de f est donc :

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$6{,}33$	$\searrow$	$-2{,}67$	$\nearrow$	

   La fonction f est donc croissante jusqu'à $x=-4$, décroissante de -4 à 2, puis croissante à partir de $x=2$.

4. Au voisinage de $x = 0$, la courbe descend lorsque x augmente. La tangente à la courbe au point d'abscisse 0 aurait donc un coefficient directeur négatif. Ainsi :

$$\boxed{f'(0) < 0}.$$

Au point B, la courbe monte lorsque x augmente. Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point B est donc positif.

5. Lorsque la fonction f est croissante, les tangentes à sa courbe ont globalement un coefficient directeur positif ou nul.

On conjecture donc :

$$\boxed{f'(x) \geqslant 0 \text{ sur }]-\infty\,;-4]}.$$

Lorsque la fonction f est décroissante, les tangentes à sa courbe ont globalement un coefficient directeur négatif ou nul.

On conjecture donc :

$$\boxed{f'(x) \leqslant 0 \text{ sur } [-4\,;2]}.$$

Aux abscisses -4 et 2, les tangentes semblent horizontales, donc le nombre dérivé semble nul.

Capacité 1 *Déterminer la fonction dérivée d'une fonction usuelle*

Pour chaque fonction, on utilise le tableau des dérivées usuelles du cours. Pour déterminer une tangente au point d'abscisse a, on utilise le fait que son coefficient directeur est $f'(a)$ et qu'elle passe par le point de coordonnées $(a\,; f(a))$.

1. $f : x \mapsto 502$.

La fonction f est constante, donc :

$$\boxed{f' : x \mapsto 0}.$$

En -1, on a $f(-1) = 502$ et $f'(-1) = 0$. La tangente est horizontale :

$$\boxed{y = 502}.$$

En 1, on a $f(1) = 502$ et $f'(1) = 0$. La tangente est aussi :

$$\boxed{y = 502}.$$

2. $g : x \mapsto 502x$.

La fonction g est affine de coefficient directeur 502, donc :

$$\boxed{g' : x \mapsto 502}.$$

La courbe de g est déjà une droite. En chacun de ses points, la tangente est cette droite elle-même.

En -1 comme en 1, l'équation de la tangente est donc :

$$\boxed{y = 502x}.$$

3. $h : x \mapsto 502 - x$.

On peut écrire $h(x) = -x + 502$. La fonction h est affine de coefficient directeur -1, donc :

$$\boxed{h' : x \mapsto -1}.$$

La courbe de h est une droite. En chacun de ses points, la tangente est cette droite elle-même.

En -1 comme en 1, l'équation de la tangente est donc :

$$\boxed{y = 502 - x}.$$

4. $j : x \mapsto x^2$.

D'après le tableau des dérivées usuelles :

$$\boxed{j' : x \mapsto 2x}.$$

En -1, on a :

$$j(-1) = 1 \quad \text{et} \quad j'(-1) = -2.$$

La tangente passe par $(-1\,;\,1)$ et a pour coefficient directeur -2 :

$$y - 1 = -2(x + 1).$$

Donc :

$$\boxed{y = -2x - 1}.$$

En 1, on a :

$$j(1) = 1 \quad \text{et} \quad j'(1) = 2.$$

La tangente passe par $(1\,;\,1)$ et a pour coefficient directeur 2 :

$$y - 1 = 2(x - 1).$$

Donc :

$$\boxed{y = 2x - 1}.$$

5. $k : x \mapsto x^3$.

D'après le tableau des dérivées usuelles :

$$\boxed{k' : x \mapsto 3x^2}.$$

En -1, on a :

$$k(-1) = -1 \quad \text{et} \quad k'(-1) = 3.$$

La tangente passe par $(-1\,;\,-1)$ et a pour coefficient directeur 3 :

$$y + 1 = 3(x + 1).$$

Donc :

$$\boxed{y = 3x + 2}.$$

En 1, on a :

$$k(1) = 1 \quad \text{et} \quad k'(1) = 3.$$

La tangente passe par $(1\,;\,1)$ et a pour coefficient directeur 3 :

$$y - 1 = 3(x-1).$$

Donc :

$$\boxed{y = 3x - 2}.$$

6. $m : x \longmapsto x^{621}$.

D'après le tableau des dérivées usuelles, si n est un entier naturel, la dérivée de $x \longmapsto x^n$ est $x \longmapsto nx^{n-1}$. Donc :

$$\boxed{m' : x \longmapsto 621x^{620}}.$$

En -1, on a :

$$m(-1) = (-1)^{621} = -1$$

et :

$$m'(-1) = 621 \times (-1)^{620} = 621.$$

La tangente passe par $(-1\,;\,-1)$ et a pour coefficient directeur 621 :

$$y + 1 = 621(x+1).$$

Donc :

$$\boxed{y = 621x + 620}.$$

En 1, on a :

$$m(1) = 1 \quad \text{et} \quad m'(1) = 621.$$

La tangente passe par $(1\,;\,1)$ et a pour coefficient directeur 621 :

$$y - 1 = 621(x-1).$$

Donc :

$$\boxed{y = 621x - 620}.$$

Capacité 2 *Déterminer la fonction dérivée d'une somme de fonctions dérivables*

1. On utilise les propriétés du cours : la dérivée d'une somme est la somme des dérivées, et la dérivée du produit d'une fonction par une constante est le produit de cette constante par la dérivée de la fonction.

a. $f_1 : x \longmapsto x^2 - 621x + 622$.

On dérive terme à terme :

$$(x^2)' = 2x, \qquad (-621x)' = -621, \qquad 622' = 0.$$

Donc :

$$\boxed{f_1' : x \longmapsto 2x - 621}.$$

b. $f_2 : x \mapsto x^3 - x^2 + x + 1$.
On dérive terme à terme :

$$(x^3)' = 3x^2, \qquad (-x^2)' = -2x, \qquad x' = 1, \qquad 1' = 0.$$

Donc :

$$\boxed{f_2' : x \mapsto 3x^2 - 2x + 1}.$$

c. $f_3 : x \mapsto x^3 + 4x^2 - 2x + 1$.
On dérive terme à terme :

$$(x^3)' = 3x^2, \qquad (4x^2)' = 4 \times 2x = 8x, \qquad (-2x)' = -2, \qquad 1' = 0.$$

Donc :

$$\boxed{f_3' : x \mapsto 3x^2 + 8x - 2}.$$

d. $f_4 : x \mapsto \dfrac{x^2}{2} - 4(x-1)$.
On peut dériver directement :

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{1}{2} \times 2x = x$$

et :

$$\big(-4(x-1)\big)' = -4.$$

Donc :

$$\boxed{f_4' : x \mapsto x - 4}.$$

2. On considère la fonction C définie sur $[0;25]$ par :

$$C(x) = x^3 - 30x^2 + 400x + 100.$$

a. La fonction C est une fonction polynôme. D'après le cours, toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Elle est donc dérivable sur l'intervalle $[0;25]$.

b. On dérive terme à terme :

$$(x^3)' = 3x^2, \qquad (-30x^2)' = -30 \times 2x = -60x, \qquad (400x)' = 400, \qquad 100' = 0.$$

Donc :

$$\boxed{C'(x) = 3x^2 - 60x + 400}.$$

c. 1 000 litres correspondent à 10 centaines de litres, donc on calcule $C'(10)$.

$$C'(10) = 3 \times 10^2 - 60 \times 10 + 400.$$

Ainsi :

$$C'(10) = 300 - 600 + 400 = 100.$$

La fonction C exprime le coût en centaines d'euros. Le coût marginal pour 1 000 litres vaut donc 100 centaines d'euros, c'est-à-dire :

$$\boxed{10\,000 \text{ euros}}.$$

Cette valeur correspond au coût marginal pour une unité supplémentaire de la variable x, c'est-à-dire pour 100 litres supplémentaires.

Capacité 3 *Exploiter le lien entre signe de la dérivée et sens de variation d'une fonction*

1. On utilise la propriété du cours : si une fonction dérivable est croissante sur un intervalle, alors sa dérivée est positive ou nulle sur cet intervalle; si elle est décroissante, alors sa dérivée est négative ou nulle.

   D'après le tableau de variations :

   - f décroît sur $[-4\,;5]$, donc $f'(x) \leqslant 0$ sur cet intervalle;
   - f croît sur $[5\,;11]$, donc $f'(x) \geqslant 0$ sur cet intervalle;
   - f décroît sur $[11\,;30]$, donc $f'(x) \leqslant 0$ sur cet intervalle.

   Le tableau de signes complété est donc :

x	-4		5		11		30
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. On utilise la propriété réciproque du cours : si la dérivée est positive ou nulle sur un intervalle, alors la fonction est croissante sur cet intervalle; si la dérivée est négative ou nulle, alors la fonction est décroissante sur cet intervalle.

   D'après le tableau de signes de g' :

   - $g'(x) > 0$ sur $]-\infty\,; -4]$, donc g est croissante sur $]-\infty\,; -4]$;
   - $g'(x) < 0$ sur $[-4\,; 1]$, donc g est décroissante sur $[-4\,; 1]$;
   - $g'(x) > 0$ sur $[1\,; +\infty[$, donc g est croissante sur $[1\,; +\infty[$.

   On complète donc la ligne des variations ainsi :

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Oralement : la fonction g est d'abord croissante jusqu'à -4, puis décroissante de -4 à 1, puis de nouveau croissante à partir de 1.

Capacité 4 ***Étudier les variations d'une fonction polynôme du second degré***

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 3x^2 - 2x + 1.$$

1. La fonction g est une fonction polynôme, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On dérive terme à terme :

$$(3x^2)' = 3 \times 2x = 6x, \qquad (-2x)' = -2, \qquad 1' = 0.$$

Donc :

$$\boxed{g'(x) = 6x - 2}.$$

2. On étudie le signe de $g'(x) = 6x - 2$.

On résout d'abord :

$$6x - 2 = 0.$$

Ainsi :

$$6x = 2$$

puis :

$$x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

L'expression $6x - 2$ est négative avant $\frac{1}{3}$, nulle en $\frac{1}{3}$, puis positive après $\frac{1}{3}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

3. On utilise le lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation de la fonction.

Puisque $g'(x) < 0$ sur $\left]-\infty ; \frac{1}{3}\right]$, la fonction g est décroissante sur $\left]-\infty ; \frac{1}{3}\right]$.

Puisque $g'(x) > 0$ sur $\left[\frac{1}{3} ; +\infty\right[$, la fonction g est croissante sur $\left[\frac{1}{3} ; +\infty\right[$.

On calcule la valeur de g au point où la dérivée s'annule :

$$g\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right) + 1.$$

Donc :

$$g\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \times \frac{1}{9} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{2}{3}.$$

Le tableau de variations est :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\searrow$		$\frac{2}{3}$		$\nearrow$

La fonction g admet donc un minimum égal à $\frac{2}{3}$ pour $x = \frac{1}{3}$.

Capacité 5 *Étudier les variations d'une fonction polynôme du troisième degré*

On considère la fonction h définie sur $[0\,;10]$ par :

$$h(x) = -x^3 + 16{,}5x^2 - 72x + 550.$$

1. La fonction h est une fonction polynôme. D'après le cours, toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Elle est donc dérivable sur l'intervalle $[0\,;10]$.

2. On dérive terme à terme :

$$(-x^3)' = -3x^2, \qquad (16{,}5x^2)' = 16{,}5 \times 2x = 33x, \qquad (-72x)' = -72, \qquad 550' = 0.$$

Donc, pour tout réel x de $[0\,;10]$:

$$\boxed{h'(x) = -3x^2 + 33x - 72}.$$

3. On développe l'expression proposée :

$$(-3x+9)(x-8) = (-3x) \times x + (-3x) \times (-8) + 9 \times x + 9 \times (-8).$$

Donc :

$$(-3x+9)(x-8) = -3x^2 + 24x + 9x - 72.$$

Ainsi :

$$(-3x+9)(x-8) = -3x^2 + 33x - 72.$$

On retrouve bien l'expression de $h'(x)$, donc :

$$\boxed{h'(x) = (-3x+9)(x-8)}.$$

4. On étudie le signe de chaque facteur sur $[0\,;10]$.

- $-3x + 9 = 0$ lorsque $x = 3$.
- $x - 8 = 0$ lorsque $x = 8$.

Le tableau de signes du produit est :

x	0		3		8		10
$-3x+9$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-8$		$-$		$-$	0	$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

5. On utilise le lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation de la fonction.

- Sur $[0\,;3]$, on a $h'(x) \leqslant 0$, donc h est décroissante.
- Sur $[3\,;8]$, on a $h'(x) \geqslant 0$, donc h est croissante.
- Sur $[8\,;10]$, on a $h'(x) \leqslant 0$, donc h est décroissante.

Calculons les valeurs utiles :

$$h(0) = 550.$$

$$h(3) = -3^3 + 16{,}5 \times 3^2 - 72 \times 3 + 550.$$

Donc :

$$h(3) = -27 + 148{,}5 - 216 + 550 = 455{,}5.$$

$$h(8) = -8^3 + 16{,}5 \times 8^2 - 72 \times 8 + 550.$$

Donc :

$$h(8) = -512 + 1056 - 576 + 550 = 518.$$

$$h(10) = -10^3 + 16{,}5 \times 10^2 - 72 \times 10 + 550.$$

Donc :

$$h(10) = -1000 + 1650 - 720 + 550 = 480.$$

Le tableau de variations est donc :

x	0		3		8		10
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	550	$\searrow$	$455{,}5$	$\nearrow$	518	$\searrow$	480

La fonction h atteint un maximum local pour $x = 8$. Les randonneurs atteignent alors une hauteur de 518 mètres.

6. D'après le tableau de variations et les valeurs calculées :

$$h(0) = 550, \qquad h(3) = 455{,}5, \qquad h(8) = 518, \qquad h(10) = 480.$$

La hauteur maximale atteinte sur l'intervalle $[0\,;10]$ est donc :

$$\boxed{550\text{ m}}$$

au début de la randonnée, pour $x=0$.

La hauteur minimale atteinte est :

$$\boxed{455{,}5\text{ m} \approx 456\text{ m}}$$

pour $x=3$.

Remarque 1

Avec la fonction donnée dans l'énoncé, le point d'abscisse 8 est seulement un maximum local. Sur tout l'intervalle $[0\,;10]$, la hauteur la plus élevée est atteinte au départ, en $x=0$, avec 550 mètres.