

Histoire 1

Le concept d'indépendance en probabilité trouve son origine dans les travaux des mathématiciens du XVII^e siècle, notamment **Blaise Pascal** et **Pierre de Fermat**, qui ont posé les bases du calcul des probabilités en étudiant les jeux de hasard. Au XVIII^e siècle, **Jacques Bernoulli** a approfondi cette notion dans son *Ars Conjectandi*, en introduisant la loi des grands nombres. Puis, au XIX^e siècle, Pierre-Simon Laplace a formalisé l'indépendance d'événements dans ses travaux sur les probabilités conditionnelles. Ce n'est toutefois qu'au XX^e siècle, avec la théorie axiomatique de **Kolmogorov** (1933), que l'indépendance a été rigoureusement définie à l'aide de la mesure de probabilité. Cette notion est essentielle en statistique et en modélisation, car elle permet d'étudier des phénomènes complexes en supposant l'absence d'influence entre certains événements.

1 Indépendance de deux événements pour une loi de probabilité \mathbb{P}

Définition 1

On considère une loi de probabilité \mathbb{P} définie sur l'univers fini Ω d'une expérience aléatoire. Deux événements A et B inclus dans Ω sont **indépendants** pour la loi \mathbb{P} si et seulement si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Remarque 1

Indépendance et incompatibilité sont des relations entre des événements qui n'ont pas du tout le même sens. Deux événements A et B sont incompatibles si leur intersection est vide, cela ne dépend pas de la loi de probabilité \mathbb{P} . Par exemple si $0 < \mathbb{P}(A) < 1$ alors $0 < \mathbb{P}(\bar{A}) < 1$ et $\mathbb{P}(\bar{A}) \times \mathbb{P}(A) \neq 0$ alors que $\mathbb{P}(A \cap \bar{A}) = 0$. Dans ce cas, A et \bar{A} sont incompatibles mais pas indépendants. De plus deux événements peuvent être indépendants pour une loi \mathbb{P} et pas pour une autre loi \mathbb{P}' . L'indépendance de deux événements dépend de la loi de probabilité et donc du modèle choisi.

Propriété 1

On considère une loi de probabilité \mathbb{P} définie sur l'univers fini Ω d'une expérience aléatoire. Soient deux événements A et B de probabilités non nulles :

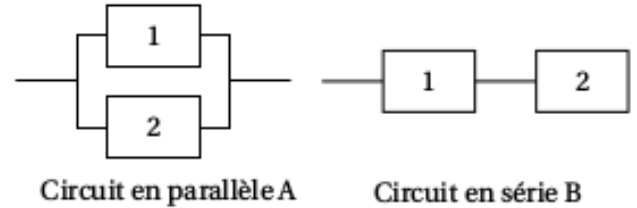
- A et B sont indépendants pour la loi \mathbb{P} si et seulement si $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$.
- A et B sont indépendants pour la loi \mathbb{P} si et seulement si $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.

Capacité 1 Utiliser l'indépendance de deux événements

Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note D_1 l'évènement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note D_2 l'évènement « le composant 2 est défaillant avant un an ».

On suppose que les deux événements D_1 et D_2 sont indépendants et que $\mathbb{P}(D_1) = \mathbb{P}(D_2) = 0,39$.

Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-contre :



1. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.
2. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.

Capacité 2 Utiliser l'indépendance de deux événements (Sujet Zéro 2025 numéro 3)

Un employé reçoit des appels téléphoniques.

On estime que la probabilité qu'un appel dure plus de cinq minutes est égale à 0,3.

On suppose que les durées des différents appels sont indépendantes.

Ce matin, l'employé reçoit deux appels.

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses. La justification est obligatoire.

☞ Affirmation 1 :

La probabilité que les deux appels durent tous les deux plus de cinq minutes est égale à 0,09.

☞ Affirmation 2 :

La probabilité qu'un appel exactement sur les deux dure plus de cinq minutes est égale à 0,21.

2 Succession de plusieurs expériences indépendantes

Définition 2

On considère n expériences aléatoires **successives**. Si les résultats de chacune d'elles ne dépendent pas des résultats des autres expériences, on dit que ces expériences sont **indépendantes**.

☞ Capacité 3 Identifier des expériences successives indépendantes

| Déterminer dans chaque cas si les épreuves successives sont indépendantes ou non.

Description	Succession d'expériences indépendantes (Oui/Non)
Tirages successifs de boules dans une urne sans remise de la boule tirée	...
Tirages successifs de boules dans une urne avec remise de la boule tirée	...
Pile ou face successifs avec une pièce	...



Propriété 2

Dans le cas d'une succession d'expériences aléatoires indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats lors des expériences successives s'obtient en multipliant les probabilités d'obtenir chaque résultat de la liste.

Capacité 4 *Modéliser une situation par une succession d'épreuves indépendantes et calculer des probabilités*

Une urne contient 3 jetons blancs et 2 jetons noirs tous indiscernables au toucher.

Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux jetons de cette urne.

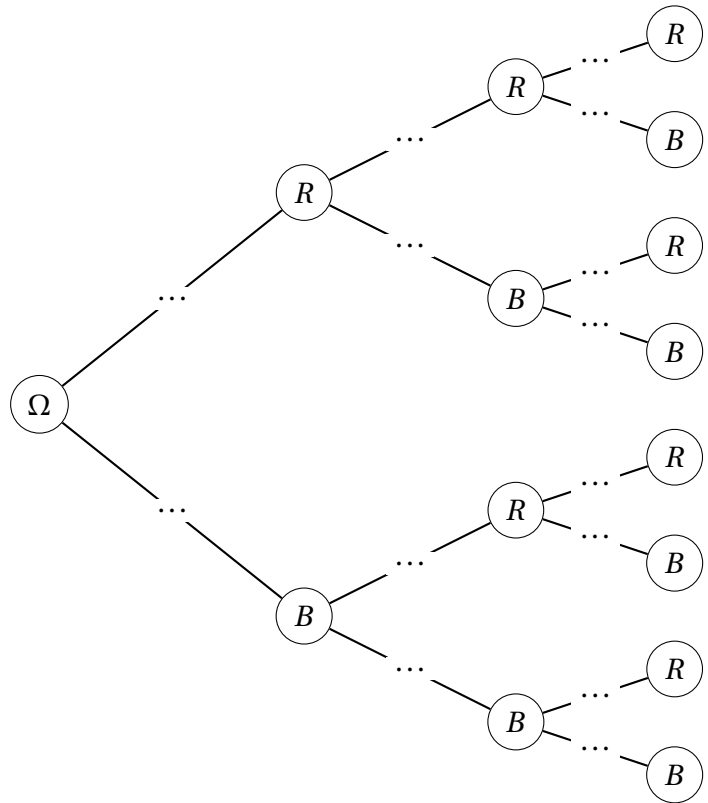
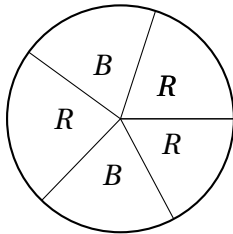
On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 euros si les deux jetons tirés sont de couleur blanche ;
- un joueur perd 1 euro si les deux jetons tirés sont de couleur noire ;
- un joueur gagne 5 euros si les deux jetons tirés sont de couleurs différentes.

1. Quelle hypothèse de l'énoncé permet d'affirmer que les deux tirages sont indépendants.
2. Modéliser la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
3. Calculer la probabilité de perdre 9 € sur une partie.
4. Calculer la probabilité de gagner 5 € sur une partie.
5. On observe 10 joueurs qui tentent leur chance en effectuant une partie de ce jeu, indépendamment les uns des autres.
 - a. Calculer la probabilité de n'avoir aucun joueur gagnant 5 €.
 - b. Calculer la probabilité d'avoir au moins 1 joueur gagnant 5 €.

Capacité 5 Répétition d'expériences aléatoires identiques et indépendantes

Lors de sa prochaine tournée *Starman*, le chanteur *David B.* va effectuer avant chaque concert un tirage aléatoire. Il lancera une fléchette sur la cible ci-dessous dont tous les secteurs sont superposables. Le secteur atteint donnera la couleur de ses cheveux pour le concert.



Lors de chaque tirage, on note :

- ☞ R l'issue « Les cheveux seront rouges »
- ☞ B l'issue « Les cheveux seront bleus »

On peut considérer que les tirages effectués pour les concerts successifs sont mutuellement indépendants.

1. Compléter l'arbre pondéré ci-après modélisant les couleurs de cheveux du chanteur lors de trois concerts successifs.
2. Calculer la probabilité que *David B.* ait les cheveux rouges pour ses trois concerts.
3. Calculer la probabilité que *David B.* ait les cheveux de la même couleur pour ses trois concerts.
4. Calculer la probabilité que *David B.* ait les cheveux de la couleur rouge pour au moins un concert.

