**Histoire 1**

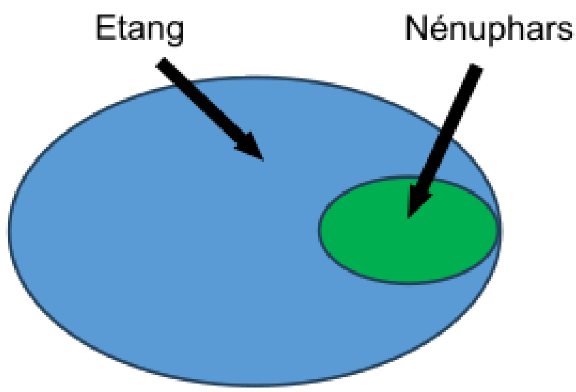
Léonard de Pise, dit Fibonacci (1175 – 1240) est un mathématicien italien auteur du *Liber abaci* (1202), un recueil de problèmes algébriques, où il popularisa l'usage des chiffres arabes. Un énoncé est resté célèbre : « *Possédant au départ un couple de lapins, combien de couples de lapins obtient-on en douze mois si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du second mois de son existence ?* », il se modélise avec la suite $f_0 = f_1 = 1$ et $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. On démontre que le rapport $f_{n+1}/f_n$ tend vers le nombre d'Or $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

# 1 Notion de suite

## Activité 1

Alexandre a acquis un étang d'une surface de 2 000 m$^2$. Le jour de son anniversaire, un dimanche, il installe des nénuphars sur une surface de 200 m$^2$.

*Étang* *Nénuphars*




1. Le dimanche d'après, la surface des nénuphars a augmenté de 40 m$^2$.

   **a.** Quel pourcentage d'augmentation cela représente-t-il ?

   **b.** Quelle est à présent la surface occupée par les nénuphars ?

2. **Premier modèle d'évolution**

   Dans cette question, on suppose que la surface occupée par les nénuphars augmente de 40 m$^2$ chaque semaine, depuis la date de l'anniversaire, tant que cela est possible.

   On note $u(n)$ l'aire de la surface occupée par les nénuphars $n$ semaines après celle de l'anniversaire, selon ce premier modèle d'évolution.

   Par exemple on a $u(0) = 200$ et $u(1) = 200 + 40 = 240$.

   **a.** Calculer l'aire occupée par les nénuphars deux semaines après l'anniversaire.

   **b.** Compléter le tableau ci-dessous :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u(n)$ | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

   **c.** Est-il possible qu'un dimanche, la surface occupée par les nénuphars soit égale à 580 m$^2$ ? Justifier.

   **d.** Exprimer $u(n)$ en fonction de $n$.

   **e.** Au bout de combien de semaines, l'étang sera-t-il entièrement recouvert de nénuphars ?

3. **Second modèle d'évolution**

Dans cette question, on suppose que la surface occupée par les nénuphars augmente de 20% chaque semaine, depuis la date de l'anniversaire, tant que cela est possible.

On note $v(n)$ l'aire de la surface occupée par les nénuphars $n$ semaines après celle de l'anniversaire, selon ce second modèle d'évolution. Par exemple on a $v(0) = 200$.

**a.** Quelle sera la surface occupée par les nénuphars 1 semaine après l'anniversaire ? et 2 semaines après ?

**b.** On considère un entier naturel $n$. Si $v(n)$ est l'aire de la surface occupée après $n$ semaines, alors $v(n+1)$ est l'aire de la surface occupée la semaine suivante.
Écrire une relation qui permet de calculer $v(n+1)$ à partir de $v(n)$.

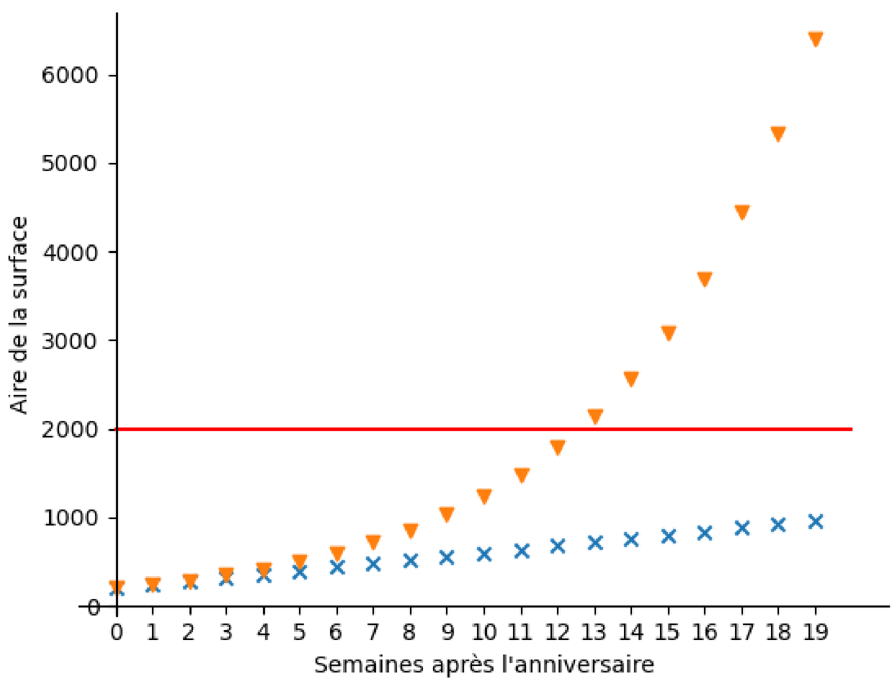
**c.** On veut calculer les valeurs successives de $v(n)$ avec un tableur comme ci-dessous. Quelle formule faut-il saisir dans les cellules `A3` et `B3` et propager vers le bas ?

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | n | v(n) |
| 2 | 0 | 2000 |
| 3 | 1 | ... |
| 4 | 2 | ... |

**d.** Au bout de combien de semaines, l'étang sera-t-il entièrement recouvert par les nénuphars ? On pourra s'aider du tableau ci-dessous :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 5 | 10 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1,2^n \approx$ | 1 | 1,2 | 1,44 | 2,49 | 6,19 | 8,92 | 10,70 | 12,84 | 15,40 |

**4.** On représenté graphiquement ci-dessous les évolutions de la surface selon le premier et le second modèle. Associer à chaque type de symbole (triangle ou croix) le modèle correspondant.



## Définition 1

**Une suite est une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels (les entiers positifs ou nuls) et à valeurs dans $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels.**
Si $u$ est le nom de la suite, l'image de $n$ par $u$ se note $u(n)$ (notation fonctionnelle) ou de manière plus usuelle $u_n$ (notation indicielle). On l'appelle **terme** d'indice $n$ ou de rang $n$ de la suite $u$.
On peut désigner une suite $u$ par la notation $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement $(u_n)$.

| | **Fonction $f$** | **Suite $u$** |
|---|---|---|
| **Ensemble de définition** | Un intervalle de réels | Un ensemble d'entiers naturels |
| **Image** | $f(4)$ | $u(4)$ ou $u_4$ (notation indicielle) |
| **Notation** | Fonction $f$ | $u$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement $(u_n)$. |

## Capacité 1 *Exprime le terme d'une suite en notation fonctionnelle ou indicielle*

Soit $u$ une suite définie sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Compléter le tableau ci-dessous par les écritures adaptées. Mettre une croix si l'écriture n'existe pas. $n$ est un entier naturel.

| Indice | Notation fonctionnelle | Notation indicielle |
|---|---|---|
| $n$ | ... | ... |
| $0$ | ... | ... |
| $n+1$ | ... | ... |
| $-1$ | ... | ... |
| $\sqrt{2}$ | ... | ... |
| Terme de valeur $\sqrt{2}$ | ... | ... |

## Capacité 2 *Maîtriser la notation indicielle*

On considère la suite $v$ définie pour tout entier naturel $n$ par $v_n = (n+3)^2$

1. Calculer $v_4$.
2. Dans l'écriture $v_5 = 64$, quelle est la valeur de l'indice ? du terme ?
3. Déterminer le terme de la suite $v$ d'indice 6.
4. Déterminer l'indice du terme de la suite de valeur 144.
5. Soit $n$ un entier naturel, exprimer en fonction de $n$ les formules permettant de calculer :

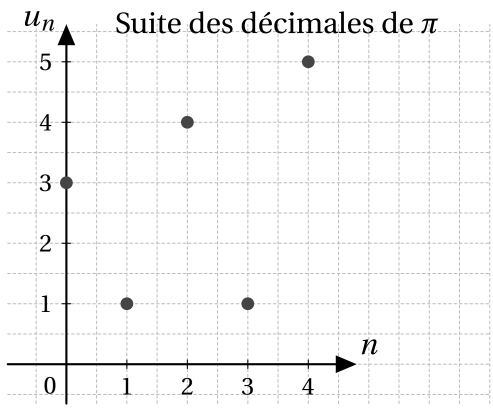
**a.** $v_{n+1}$ ; **b.** $v_{2n}$ ; **c.** $v_{n-1}$.

# 2 Différents modes de génération d'une suite

## 2.1 Suite définie par extension

**Définition 2**

- Une suite est **définie par extension** si tous ses termes successifs nous sont donnés, comme par exemple une série statistique ou la suite des chiffres représentant un nombre en écriture décimale.
- Dans un repère, une suite $(u_n)$ est représentée graphiquement par un **nuage de points** de coordonnées $(n\,;\,u_n)$.




## 2.2 Suite définie par une formule explicite

**Définition 3**

Une suite $u$ est définie par une **formule explicite** si son terme $u(n)$ (ou $u_n$) peut se calculer directement en fonction de $n$.

**Capacité 3** ***Calculer les termes d'une suite définie explicitement***

On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $v_n = 3 + 4n$.

1. Calculer dans un tableau les valeurs des termes $v_n$ avec $0 \leqslant n \leqslant 10$.
2. Représenter dans un repère le nuage des points de coordonnées $(n\,;\,v_n)$ avec $0 \leqslant n \leqslant 10$.
   Que peut-on dire des onze points du nuage ?
3. Déterminer l'indice du terme de valeur 147.
4. À partir quel indice $n$, a-t-on $v_n > 995$ ?

### 2.3 Suite définie par une formule de récurrence

**Définition 4**

Une suite $u$ est définie par une **formule de récurrence** si son terme $u(n)$ (ou $u_n$) s'exprime en fonction de termes d'indices inférieurs.

**Capacité 4** ***Modéliser une évolution avec une suite définie par récurrence***

Bob s'est fixé un objectif : participer à un marathon qui aura lieu très bientôt dans sa ville.
Pour cela, il désire programmer sa préparation au marathon de la manière suivante :

- lors du premier entraînement, il décide de courir 20 km ;
- il augmente ensuite, à chaque entraînement, la distance à courir de 5 %.

On peut modéliser la distance parcourue lors de ses entraînements par une suite $d$, où, pour tout entier naturel $n$ non nul, le nombre $d(n)$ désigne la distance à courir en kilomètre, lors de son $n$-ième entraînement.
On a ainsi $d(1) = 20$.

1. Calculer $d(2)$, puis vérifier que $d(3) = 22,05$.
2. Pour tout entier naturel $n$ non nul, exprimer $d(n+1)$ en fonction de $d(n)$.
3. Programmer le calcul des termes de cette suite $d$ sur sa calculatrice avec le mode `suite` ou `recurrence`.
4. La distance à courir lors d'un marathon est de 42, 195 km. Bob estime qu'il sera prêt pour la course, s'il parvient à courir au moins 43 km lors d'un de ses entraînements.

   En calculant les termes successifs de la suite jusqu'à ce que le seuil de 43 km soit atteint, déterminer le nombre de jours d'entraînement nécessaires pour que Bob soit prêt pour le marathon.

**Capacité 5** ***Calculer des termes d'une suite définie par une relation de récurrence***

Soit la suite $u$ définie par : $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 2$.

1. Détailler les calculs de $u_1$ et $u_2$.
2. Avec le mode `suite` ou `recurrence` de la calculatrice, calculer une valeur décimale approchée à $10^{-6}$ près de $u_{14}$.

# 3 Sens de variation d'une suite

**Définition 5**

Soit $u$ une suite définie sur l'ensemble des entiers naturels.

☞ $u$ est **croissante** si pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $u_n \leqslant u_{n+1}$.

☞ $u$ est **décroissante** si pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $u_n \geqslant u_{n+1}$.

☞ $u$ est **monotone** si elle est **croissante** ou **décroissante**.

☞ $u$ n'est pas monotone si ..........................................................................

**Capacité 6** ***Donner un exemple de suite croissante, décroissante ou non monotone.***

On considère une suite $d$ réduite à six notes, celles obtenues par un élève en cours de mathématiques. On note $d_1$, $d_2$, $d_3$, $d_4$, $d_5$ et $d_6$ ces notes.

1. Donner un premier exemple où la suite $d$ est croissante. Représenter la suite par un nuage de points.
2. Donner un second exemple où la suite $d$ est décroissante. Représenter la suite par un nuage de points.
3. Donner un troisième exemple où la suite $d$ n'est pas monotone. Représenter la suite par un nuage de points.