Histoire 1

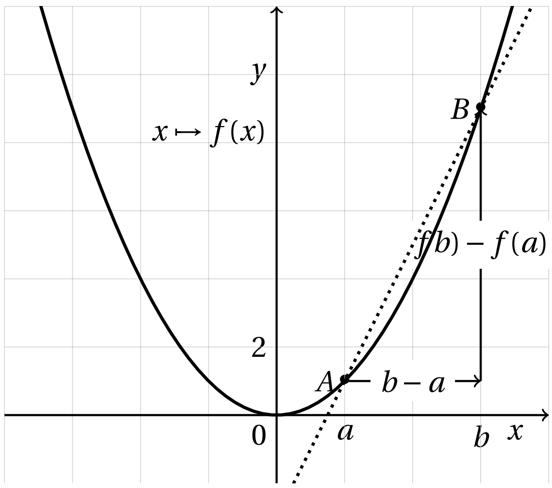
Isaac Newton (1642-1727) est un mathématicien et physicien anglais, père de la physique moderne et découvreur de la gravitation universelle dans son fameux *Principia* de 1687. En 1669 il écrit le *De analysi*, premier exposé rigoureux de *calcul infinitésimal*, basé sur le passage à la limite dans des séries infinies, où il introduit la notion de dérivée pour mesurer la variation instantanée d'une fonction qui peut s'interpréter comme un coût marginal si la fonction est un coût de production, une vitesse instantanée si la fonction est une distance ou la vitesse d'apparition ou de disparition d'une substance si la fonction représente sa concentration dans le sang.

1 Sécante et tangente à une courbe de fonction

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On considère deux réels distincts a et b appartenant à I et dans un repère du plan les points $A\left(a\,;\,f(a)\right)$ et $B\left(b\,;\,f(b)\right)$ appartenant à la courbe de f.
La droite (AB) est une **sécante** à la courbe de f.
Le coefficient directeur de la sécante (AB) est le **taux de variation** de f entre a et b :

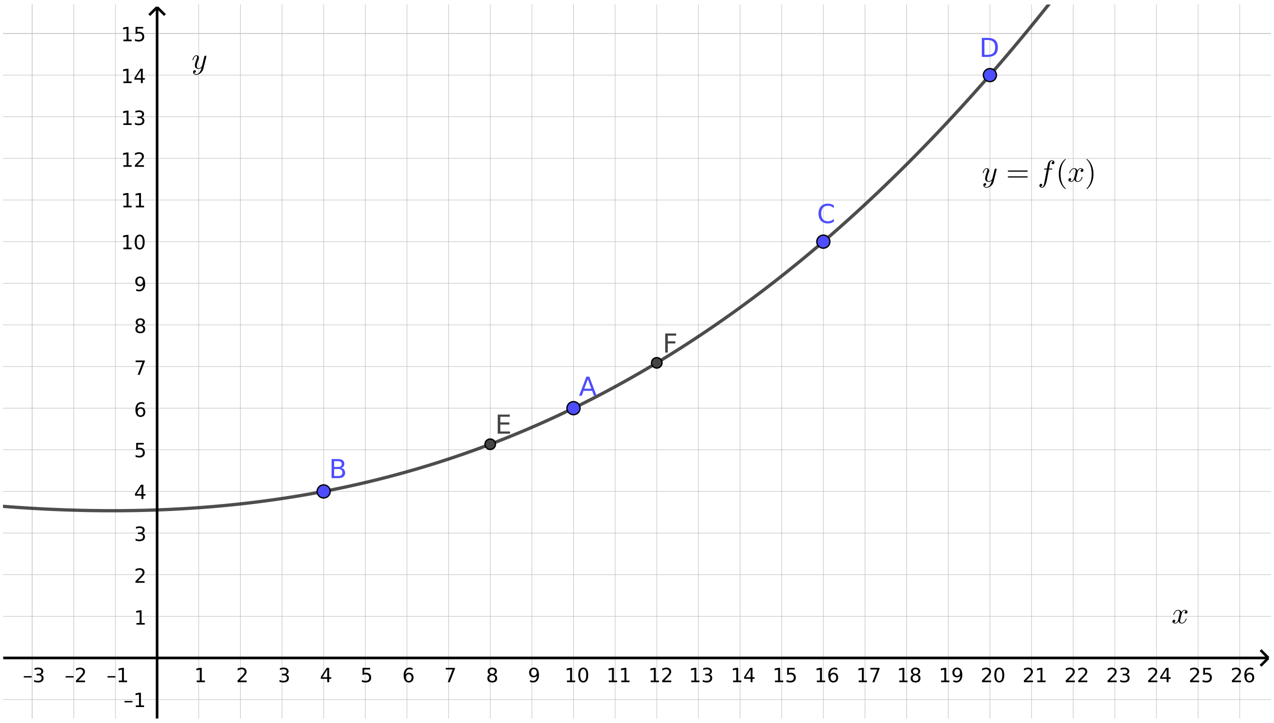
$$\boxed{\text{Taux de variation de } f \text{ entre } a \text{ et } b = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$



Capacité 1 ***Calculer un taux de variation et faire tendre les sécantes vers une position limite***

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont on donne une partie de la représentation graphique ci-dessous dans un repère du plan.

La courbe de f passe par les points $A(10\,;\,6)$, $B(4\,;\,4)$, $C(16\,;\,10)$, $D(20\,;\,14)$, $E\left(8\,;\,\frac{77}{15}\right)$ et $F\left(12\,;\,\frac{319}{45}\right)$.



1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

a	b	Taux de variation de f entre a et b	Coefficient directeur de la sécante
4	10	...	(AB)
8	10	...	...
12	10	...	...
16	10	...	...
20	10	...	...

2. Déterminer une équation de la droite Δ passant par A et de coefficient directeur $\frac{1}{2}$.

....

....

....

Tracer cette droite.

3. Placer d'abord sa règle sur la figure pour représenter une sécante à la courbe de f passant par A et un autre point M. Puis faire glisser M sur la courbe de f pour qu'il se rapproche de A.

Lorsque M se rapproche de A, comment évolue la position de la sécante (AM) par rapport à la droite Δ ?

....

....

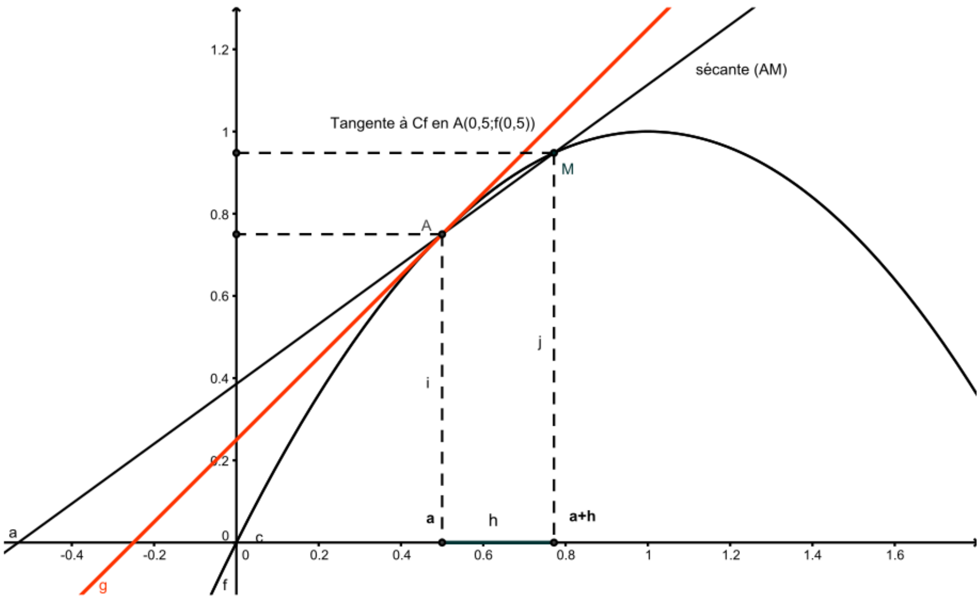
2 Nombre dérivé et tangente en un point

2.1 Fonction dérivable en un point

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I.
Dans un repère du plan, on considère le point A d'abscisse a et une sécante (AM) à la courbe de f.
Si lorsque M tend vers A, la sécante (AM) tend vers une position limite représentée par une droite T_A passant par A, alors on dit que la fonction f est **dérivable** en a.
Dans ce cas :

- ☞ la droite T_A position limite des sécantes (AM) est la **tangente** à la courbe de f en A ;
- ☞ le coefficient directeur de la tangente T_A est le **nombre dérivé de f en a** et on le note $f'(a)$.



Tangente en $A(0,5\,;\,f(0,5))$ à la courbe de la fonction $f : x \mapsto -x^2 + 2x$

Remarque 1

On considère deux domaines classiques d'application :

- La *mécanique* où la distance parcourue par un mobile sur un axe peut s'exprimer en fonction du temps t comme une fonction de loi horaire $d(t)$.
- L'*économie* où la coût de production d'un objet manufacturé peut s'exprimer en fonction de la quantité q produite par une fonction de coût $C(q)$.

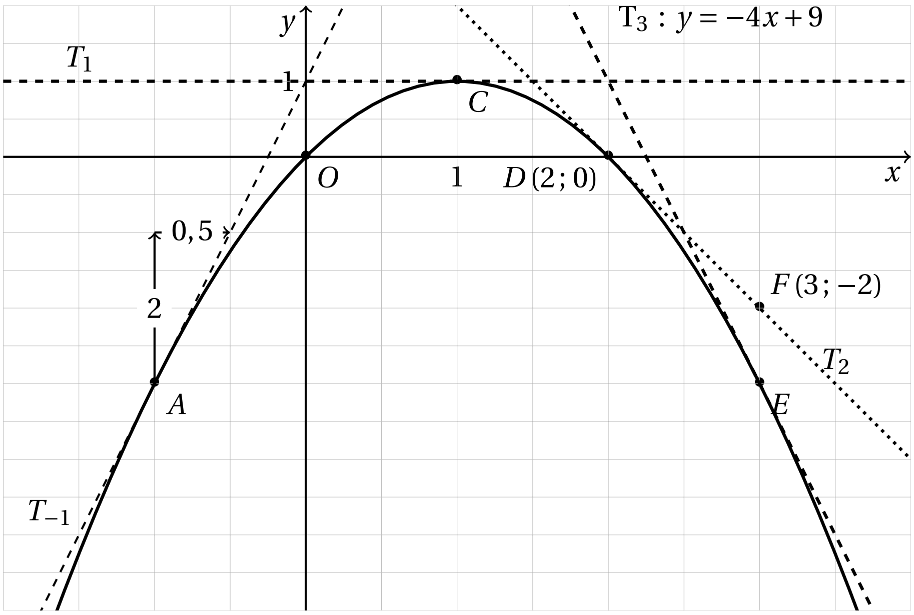
Le coefficient directeur d'une sécante à la courbe de la fonction s'interprète comme un taux de variation des valeurs de la fonction entre deux valeurs de la variable :

Domaine	Fonction	Variable	Image	Taux de variation	Interprétation
Mécanique	Loi horaire d	Temps t	Distance $d(t)$	$\dfrac{d(t)-d(a)}{t-a}$	Vitesse moyenne entre les instants a et t
Économie	Coût C	Quantité q	Coût $C(q)$	$\dfrac{C(q)-C(a)}{q-a}$	Coût moyen par unité supplémentaire quand on passe de a à q unités produites

Si on fixe un point de la sécante et qu'on fait tendre l'autre vers le point fixé, la sécante tend vers la position limite qui est la tangente, et le taux de variation tend vers un taux de variation instantané qui est le nombre dérivé au point fixé :

Domaine	Fonction	Variable	Image	Taux de variation	Interprétation
Mécanique	Loi horaire d	Temps t	Distance $d(t)$	m/s	Vitesse instantanée
Économie	Coût C	Quantité q	Coût $C(q)$	euro/unité produite	Coût marginal

Capacité 2 *Déterminer graphiquement un nombre dérivé*



Sur le graphique précédent, on a représenté la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $[-2;4]$ par :

$$f(x) = -x^2 + 2x$$

On admet que f est dérivable en -1, 0, 1, 2 et 3 et on a tracé les tangentes à $\mathscr{C}_f$:

- T_1 au point $C(1;1)$;
- T_{-1} au point $A(-1;-3)$;
- T_2 au point $D(2;0)$;
- T_3 au point $E(3;-3)$;

Avec les éléments présents sur le graphique, déterminer les nombres dérivés $f'(1)$, $f'(-1)$, $f'(2)$ et $f'(3)$:

Nombré dérivé	Coefficient directeur de la droite	Calcul
$f'(1)$	...	...
$f'(-1)$	...	...
$f'(2)$	...	...
$f'(3)$	...	...

2.2 Équation de tangente

Propriété 1

Si f est une fonction dérivable en a, alors une équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est :

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

Capacité 3 ***Déterminer une équation de tangente à partir de la formule***

On considère une fonction f définie et dérivable en tout réel a.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère du plan.

1. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 est $y = -3x + 4$.

   Déterminer les valeurs de $f(2)$ et $f'(2)$.

   ....

   ....

   ....

2. On a $f(-3) = 9$ et $f'(-3) = 4$. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -3.

   ....

   ....

   ....

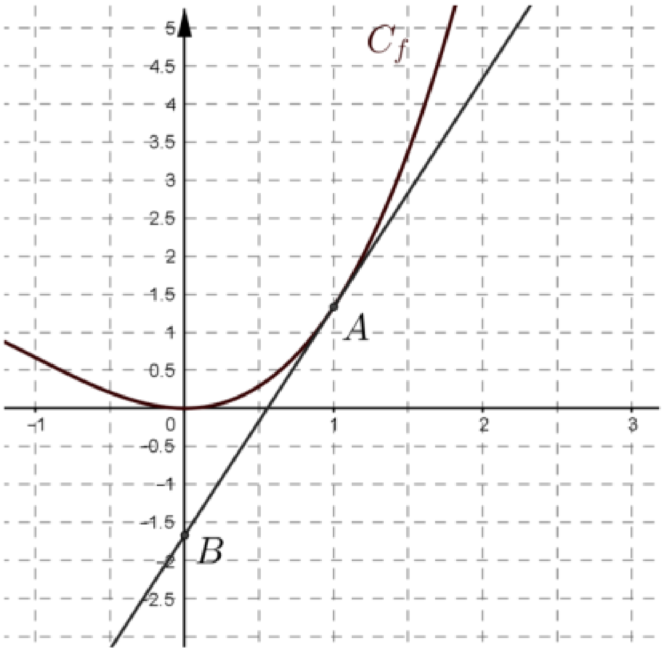
Capacité 4 *Déterminer une équation de tangente par la formule et un nombre dérivé par lecture graphique*

1. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(2) = 5$ et $f'(2) = -1$.

   Dans un repère, la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2 a pour équation :

   a. $y = 5x - 11$ **b.** $y = -x + 7$
   c. $y = -x + 3$ **d.** $y = -x - 3$

2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère est donnée ci-dessous.



   La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A\left(1\,;\,\frac{4}{3}\right)$ passe par le point $B\left(0\,;\,-\frac{5}{3}\right)$. On a :

   a. $f'(1) = \frac{4}{3}$ **b.** $f'(1) = \frac{1}{3}$
   c. $f'(1) = -\frac{5}{3}$ **d.** $f'(1) = 3$