Corrigé détaillé – Arbres de probabilités (capacités 1 à 5)

Capacité 1 – Compléter un arbre de probabilités pondérées avec la propriété des noeuds

On rappelle que la somme des probabilités portées par les branches issues d'un même noeud vaut 1.

— Au premier niveau : $\mathbb{P}(A) = 0{,}4$ donc $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

— Depuis le noeud A : $\mathbb{P}_A(B) = 0{,}9$ donc $\mathbb{P}_A(\overline{B}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

— On donne $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = 0{,}15$. Or, par la propriété des chemins,

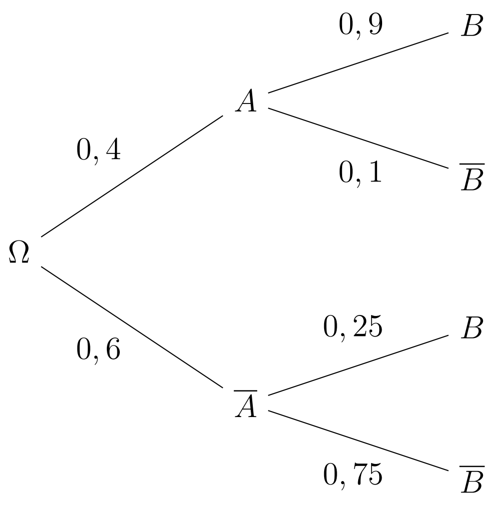
$$\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)$$

d'où

$$\mathbb{P}_{\overline{A}}(B) = \frac{0{,}15}{0{,}6} = 0{,}25.$$

Ainsi $\mathbb{P}_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$.

Arbre complété :



Capacité 2 – Calculer une probabilité avec la propriété des chemins

On reprend l'arbre pondéré de probabilités de la capacité 1.

1. Déterminer les probabilités suivantes :
   (a) $\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$
   Par la propriété des chemins :
   $$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) = 0{,}4 \times 0{,}9 = 0{,}36.$$
   (b) $\mathbb{P}_{\mathrm{A}}(B)$
   Il s'agit de l'étiquette de la branche $A \to B$: $\mathbb{P}_A(B) = 0{,}9$.
   (c) $\mathbb{P}_{\overline{\mathrm{A}}}(B)$
   D'après la capacité 1 : $\mathbb{P}_{\overline{A}}(B) = 0{,}25$.
   (d) $\mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B})$
   Elle est donnée : $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = 0{,}15$.
   (e) $\mathbb{P}(\mathrm{B})$
   Les événements $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$ sont disjoints et leur réunion vaut B, donc :
   $$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = 0{,}36 + 0{,}15 = 0{,}51.$$
   (f) $\mathbb{P}(\overline{\mathrm{B}})$
   $$\mathbb{P}(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}(B) = 1 - 0{,}51 = 0{,}49.$$
2. (a) La probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$ apparaît-elle dans l'arbre pondéré ?
   Non : l'arbre de la capacité 1 est construit avec une première séparation selon $A/\overline{A}$, donc il donne directement des probabilités conditionnelles du type $\mathbb{P}_A(\,\cdot\,)$ ou $\mathbb{P}_{\overline{A}}(\,\cdot\,)$, pas du type $\mathbb{P}_B(A)$.
   On calcule $\mathbb{P}_B(A)$ par la définition :
   $$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0{,}36}{0{,}51} = \frac{36}{51} = \frac{12}{17} \approx 0{,}706.$$
   (b) Calculer de même $\mathbb{P}_{\overline{\mathrm{B}}}(\mathrm{A})$
   D'abord
   $$\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(\overline{B}) = 0{,}4 \times 0{,}1 = 0{,}04.$$

Ainsi

$$\mathbb{P}_{\overline{B}}\big(A\big) = \frac{\mathbb{P}\big(A \cap \overline{B}\big)}{\mathbb{P}\big(\overline{B}\big)} = \frac{0{,}04}{0{,}49} = \frac{4}{49} \approx 0{,}0816.$$

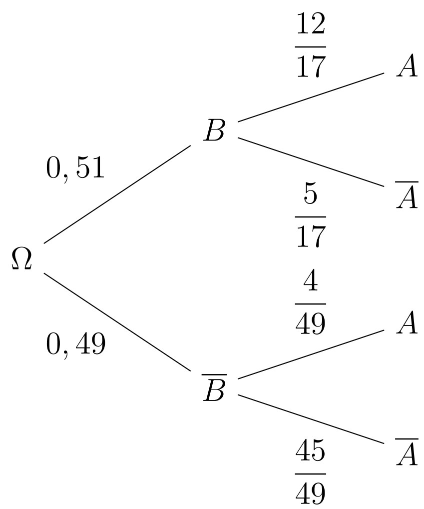
(c) Compléter l'arbre pondéré de probabilités ci-dessous :

On a $\mathbb{P}\big(B\big) = 0{,}51$ et $\mathbb{P}\big(\overline{B}\big) = 0{,}49$.

De plus :

$$\mathbb{P}_B\big(A\big) = \frac{12}{17} \quad \text{donc} \quad \mathbb{P}_B\big(\overline{A}\big) = 1 - \frac{12}{17} = \frac{5}{17}.$$

$$\mathbb{P}_{\overline{B}}\big(A\big) = \frac{4}{49} \quad \text{donc} \quad \mathbb{P}_{\overline{B}}\big(\overline{A}\big) = 1 - \frac{4}{49} = \frac{45}{49}.$$

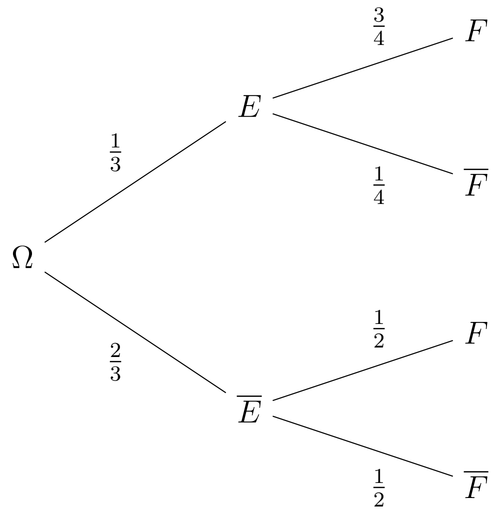


Capacité 3 – Appliquer la formule des probabilités totales

1. Compléter les probabilités manquantes dans l'arbre.

$$\mathbb{P}\big(\overline{E}\big) = 1 - \mathbb{P}\big(E\big) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \qquad \mathbb{P}_E\big(\overline{F}\big) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}, \qquad \mathbb{P}_{\overline{E}}\big(\overline{F}\big) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Arbre complété :



2. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(E \cap F)$.

$$\mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}_E(F) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

3. En appliquant la formule des probabilités totales montrer que la probabilité de l'événement F est égale à $\frac{7}{12}$.

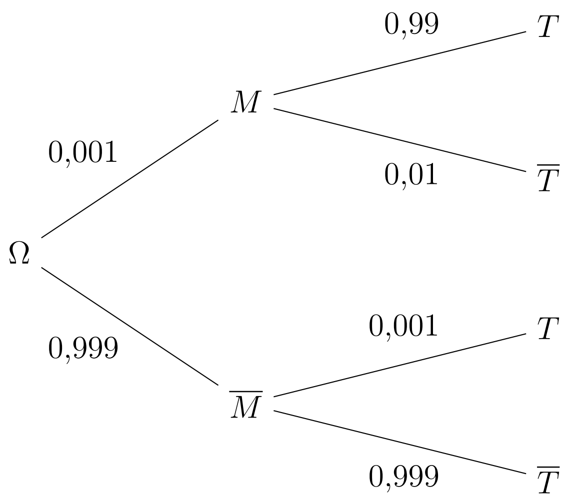
$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}_E(F) + \mathbb{P}(\overline{E})\mathbb{P}_{\overline{E}}(F) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}.$$

Capacité 4 – Utiliser un arbre pondéré pour résoudre un problème de probabilités

On note M : « la personne est malade », T : « le test est positif ».
Données :

$$\mathbb{P}(M) = 0{,}001, \quad \mathbb{P}(\overline{M}) = 0{,}999, \quad \mathbb{P}_M(T) = 0{,}99, \quad \mathbb{P}_{\overline{M}}(T) = 0{,}001.$$

1. Traduire l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.



2. Déterminer la probabilité de l'événement $M \cap T$.

$$\mathbb{P}(M \cap T) = \mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}_M(T) = 0{,}001 \times 0{,}99 = 0{,}00099 = 9{,}9 \times 10^{-4}.$$

3. Démontrer que la probabilité $\mathbb{P}(T)$ est égale à $1{,}989 \times 10^{-3}$.

   Par la formule des probabilités totales (partition $M/\overline{M}$) :

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(T) + \mathbb{P}(\overline{M})\mathbb{P}_{\overline{M}}(T)$$
$$\mathbb{P}(T) = 0{,}001 \times 0{,}99 + 0{,}999 \times 0{,}001$$
$$\mathbb{P}(T) = 0{,}00099 + 0{,}000999 = 0{,}001989.$$

   Donc $\mathbb{P}(T) = 1{,}989 \times 10^{-3}$.

4. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

   Affirmation : « Si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade ».

   On calcule

$$\mathbb{P}_T(M) = \frac{\mathbb{P}(M \cap T)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{0{,}00099}{0{,}001989} = \frac{990}{1989} = \frac{110}{221} \approx 0{,}498.$$

   On obtient $\mathbb{P}_T(M) < 0{,}5$, donc l'affirmation est **vraie**.

Capacité 5 – Traduire la formule des probabilités totales par une équation

On sait que $\mathbb{P}(F) = 0{,}35$ et $x = \mathbb{P}(E)$.

1. Exprimer $\mathbb{P}(\overline{E})$ en fonction de $x = \mathbb{P}(E)$.

$$\mathbb{P}(\overline{E}) = 1 - \mathbb{P}(E) = 1 - x.$$

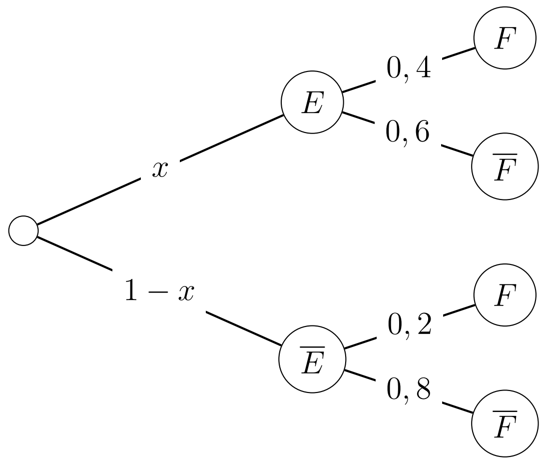
2. Déterminer la probabilité que l'événement F soit réalisé sachant que l'événement $\overline{E}$ est réalisé.

   Sur l'arbre, la branche $\overline{E} \to \overline{F}$ vaut 0,8, donc

$$\mathbb{P}_{\overline{E}}(\overline{F}) = 0{,}8 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}_{\overline{E}}(F) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$$

3. Recopier l'arbre pondéré en complétant les probabilités manquantes.

   Depuis E : $\mathbb{P}_E(F) = 0{,}4$ donc $\mathbb{P}_E(\overline{F}) = 0{,}6$.
   Depuis la racine : $\mathbb{P}(E) = x$ donc $\mathbb{P}(\overline{E}) = 1 - x$.
   Depuis $\overline{E}$: $\mathbb{P}_{\overline{E}}(\overline{F}) = 0{,}8$ donc $\mathbb{P}_{\overline{E}}(F) = 0{,}2$.



4. Exprimer la probabilité de l'événement F en fonction de x et en déduire la valeur de $x = \mathbb{P}(E)$.

   Par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}_E(F) + \mathbb{P}(\overline{E})\mathbb{P}_{\overline{E}}(F) = x \cdot 0{,}4 + (1-x)\cdot 0{,}2 = 0{,}2 + 0{,}2x.$$

   Or $\mathbb{P}(F) = 0{,}35$, donc

$$0{,}2 + 0{,}2x = 0{,}35 \quad \Rightarrow \quad 0{,}2x = 0{,}15 \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}75.$$

   Ainsi $\mathbb{P}(E) = 0{,}75$ et $\mathbb{P}(\overline{E}) = 0{,}25$.