Corrigés disponibles sur le site de l'APMEP :
https://www.apmep.fr/Annales-Terminale-Generale#Enseignement-de-specialite-depuis-2021

1 Géométrie dans l'espace

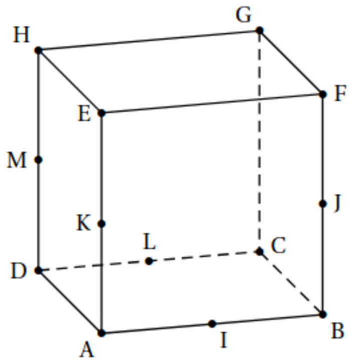
Exercice 1 *Vrai/Faux*

Source : https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Amerique_du_Nord_J2_spe_22_05_2025_DV_FK.pdf

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

PARTIE A

ABCDEFGH est un cube d'arête de longueur 1.
Les points I, J, K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [BF], [AE], [CD] et [DH].



Affirmation 1 : « $\overrightarrow{JH} = 2\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{CB}$ »
Affirmation 2 : « Le triplet de vecteurs $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AG}\right)$ est une base de l'espace. »
Affirmation 3 : « $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{LM} = -\dfrac{1}{4}$. »

PARTIE B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

- le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x - y + 3z + 6 = 0$
- les points $A(2\,;\,0\,;\,-1)$ et $B(5\,;\,-3\,;\,7)$

Affirmation 4 : « Le plan $\mathscr{P}$ et la droite (AB) sont parallèles. »
Affirmation 5 : « Le plan $\mathscr{P}'$ parallèle à $\mathscr{P}$ passant par B a pour équation cartésienne $-2x + y - 3z + 34 = 0$ »
Affirmation 6 : « La distance du point A au plan $\mathscr{P}$ est égale à $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$. »

On note (d) la droite de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -12 + 2k \\ y &=& 6 \\ z &=& 3 - 5k \end{array}\right. , \text{où } k \in \mathbb{R}$$

Affirmation 7 : « Les droites (AB) et (d) ne sont pas coplanaires. »

2 Suites et équations différentielles

Exercice 2 *Vrai/Faux*

Source : https://www.apmep.fr/IMG/pdf/SpeJ2_22_11_2024_Am_du_Sud_DV.pdf

Cet exercice contient 5 affirmations.
Pour chaque affirmation, répondre par VRAI ou FAUX en justifiant la réponse.
Toute absence de justification ou justification incorrecte ne sera pas prise en compte dans la notation.

Partie 1

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 10 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2.$$

1. **Affirmation 1** : La suite (u_n) est décroissante minorée par 0.
2. **Affirmation 2** : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
3. **Affirmation 3** : La suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 3$ est géométrique.

Partie 2

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = \dfrac{3}{2}y + 2$ d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

1. **Affirmation 4** : Il existe une fonction constante solution de l'équation différentielle (E).
2. Dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f solution de (E) telle que $f(0) = 0$.
3. **Affirmation 5** : La tangente au point d'abscisse 1 de $\mathscr{C}_f$ a pour coefficient directeur $2\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$.

3 Analyse, étude de fonctions et calcul intégral

Exercice 3

Source : https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Amerique_du_Nord_J2_secours_spe_22_05_2025_FK.pdf

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 2x - 1.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée seconde de f, c'est-à-dire la fonction dérivée de la fonction f'.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Pour tout réel x, calculer $f'(x)$.

3. Montrer que pour tout réel x :

$$f''(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$$

4. Étudier la convexité de la fonction f.

5. Étudier les variations de la fonction f' sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations en y faisant apparaître la valeur exacte de l'extremum.

Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

6. En déduire le signe de la fonction f' sur $\mathbb{R}$, puis justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

7. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.

Donner un encadrement de α, au centième près.

8. On considère la droite Δ d'équation $y = 2x - 1$.

Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite Δ.

Partie B : Calcul d'aire

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine D_n délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$. On note

$$I_n = \int_1^n x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_n en fonction de n.

2. **a.** Justifier que l'aire du domaine D_n est I_n.

b. Calculer la limite de l'aire du domaine D_n quand n tend vers $+\infty$.

4 Probabilités

Exercice 4

Source : https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Amerique_du_Nord_J2_spe_22_05_2025_DV_FK.pdf

Au basket-ball, il est possible de marquer des paniers rapportant un point, deux points ou trois points.
Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

Partie A

L'entraineur d'une équipe de basket décide d'étudier les statistiques de réussite des lancers de ses joueurs. Il constate qu'à l'entrainement, lorsque Victor tente un panier à trois points, il le réussit avec une probabilité de $0,32$.

Lors d'un entrainement, Victor effectue une série de 15 lancers à trois points. On suppose que ces lancers sont indépendants.

On note N la variable aléatoire qui donne le nombre de paniers marqués.

Les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.

1. On admet que la variable aléatoire N suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

2. Calculer la probabilité que Victor réussisse exactement 4 paniers lors de cette série.

3. Déterminer la probabilité que Victor réussisse au plus 6 paniers lors de cette série.

4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire N.

5. On note T la variable aléatoire qui donne le nombre de **points** marqués après cette série de lancers.

- **a.** Exprimer T en fonction de N.
- **b.** En déduire l'espérance de la variable aléatoire T. Donner une interprétation de cette valeur dans le contexte de l'exercice.
- **c.** Calculer $P(12 \leqslant T \leqslant 18)$.

Partie B

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de points marqués par Victor lors d'un match.

On admet que l'espérance $E(X) = 22$ et la variance $V(X) = 65$.

Victor joue n matchs, où n est un nombre entier strictement positif.
On note $X_1, X_2, \ldots, X_n$ les variables aléatoires donnant le nombre de points marqués au cours des 1^{er}, 2^{e}, …, n-ième matchs. On admet que les variables aléatoires X_1, X_2, …, X_n sont indépendantes et suivent la même loi que celle de X.

On pose $\quad M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$.

1. Dans cette question, on prend $n = 50$.

- **a.** Que représente la variable aléatoire M_{50} ?
- **b.** Déterminer l'espérance et la variance de M_{50}.
- **c.** Démontrer que $P(|M_{50} - 22| \geqslant 3) \leqslant \dfrac{13}{90}$.
- **d.** En déduire que la probabilité de l'évènement « $19 < M_{50} < 25$ » est strictement supérieure à 0,85.

2. Indiquer, en justifiant, si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :
« Il n'existe aucun entier naturel n tel que $P\big(|M_n - 22| \geqslant 3\big) < 0,01$ ».