Somme de variables aléatoires
Capacités du cours

Capacité 1 ***Calculer une espérance, une variance, un écart type***

1. On considère la variable aléatoire Y dont la loi est donnée ci-dessous :

k	-5	1	2	10
$\mathbb{P}(Y=k)$	0,35	0,5	…	0,1

   a. Détailler les calculs de l'espérance $\mathbb{E}(Y)$ de Y, de sa variance $\mathbb{V}(Y)$ et de son écart-type $\sigma(Y)$.

   b. Retrouver ces résultats avec l'éditeur de listes de la calculatrice.

2. On lance un dé à 6 faces équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note X le nombre porté par la face du dessus.

   Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X.

3. On lance un dé à n faces équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à n et on note Y le nombre porté par la face du dessus.

   Déterminer l'espérance de la variable aléatoire Y.

1) a) $P(Y=-5)+P(Y=1)+P(Y=2)+P(Y=10)=1$

$\iff 0{,}35+0{,}5+P(Y=2)+0{,}1=1$

$\iff P(Y=2)=0{,}05$

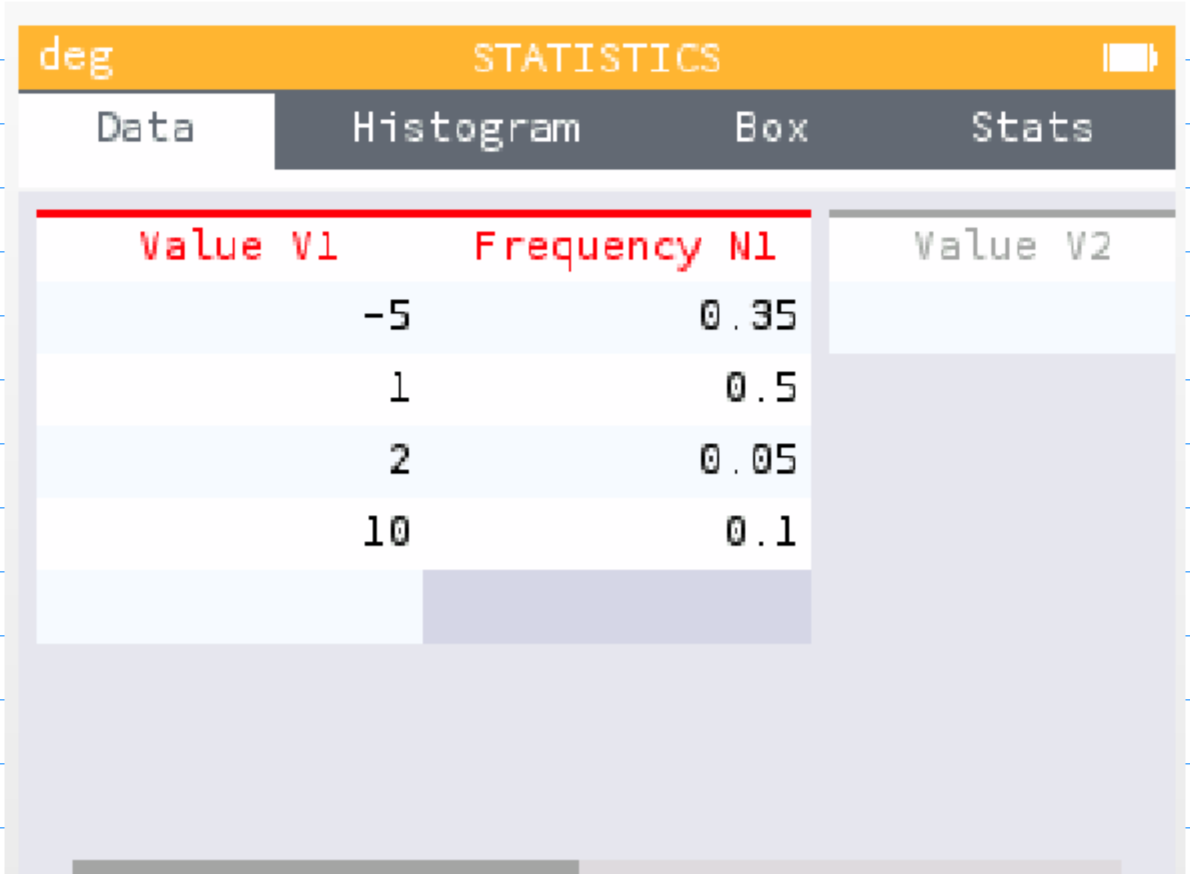
$E(Y)=-5\times0{,}35+1\times0{,}5+2\times0{,}05+10\times0{,}1$

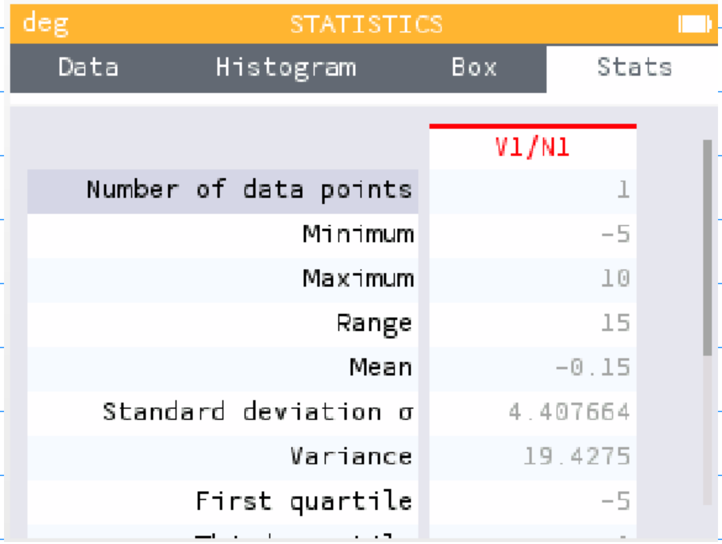
$E(Y)=-0{,}15$

$V(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2$

$V(Y)=(-5)^2\times0{,}35+1^2\times0{,}5+2^2\times0{,}05+10^2\times0{,}1-(-0{,}15)^2$

$V(Y)=19{,}4275$ $\quad\sigma(Y)=\sqrt{19{,}4275}\approx4{,}41$ à 0,01 près


deg
STATISTICS
Data
Histogram
Box
Stats
Value V1
Frequency N1
Value V2
-5
0.35
1
0.5
2
0.05
10
0.1


deg
STATISTICS
Data
Histogram
Box
Stats
V1/N1
Number of data points
1
Minimum
-5
Maximum
10
Range
15
Mean
-0.15
Standard deviation σ
4.407664
Variance
19.4275
First quartile
-5

2. On lance un dé à 6 faces équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note X le nombre porté par la face du dessus.

Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X.

Loi de probabilité de X

k	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X) = \frac{1}{6} \times (1+2+3+4+5+6) = \frac{1}{6} \times \frac{6(6+1)}{2} = \frac{7}{2}$$

$$V(X) = \frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) - \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$V(X) = \frac{1}{6} \times \frac{6(6+1)(2\times 6+1)}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$V(X) = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{12}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{35}{3}}$$

3. On lance un dé à n faces équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à n et on note Y le nombre porté par la face du dessus.

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire Y.

Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$

$$P(Y=k) = \frac{1}{n}$$

$$E(Y) = \frac{1}{n} \times (1+2+\cdots+n) = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Capacité 2 *Utiliser la notion d'espérance dans une résolution de problème*

1. Le nombre de spectateurs pour un festival de musique définit une variable aléatoire X d'espérance 12 000 et de variance 1 500. Chaque billet est vendu au tarif de 45 € et le coût global d'organisation du festival est de 100 000 €.

   Soit B la variable aléatoire associée au bénéfice réalisé par l'organisateur du spectacle.

   Déterminer $\mathbb{E}(B)$ et $\sigma(B)$.

2. On considère que pour la session 2 020 d'un concours, la note X sur 10 attribuée à un candidat pris au hasard, aura pour espérance $\mathbb{E}(X) = 5,4$ et pour écart-type $\sigma(X) = 2$

   Le responsable du concours veut obtenir une moyenne de 5 avec un écart-type de 1,5. Ainsi, il veut appliquer une transformation affine à X en lui associant $aX + b$ avec a et b des réels et $a > 0$.

   a. Exprimer $\mathbb{E}(aX + b)$ et $\sigma(aX + b)$ en fonction de a et b.

   b. En déduire le calcul de a et b.

1) Bénéfice = Recette - Coût

Bénéfice = Prix Unitaire × Quantité − Coût

$B = 45X - 100000$

Par linéarité de l'espérance, on a :

$E(B) = 45\,E(X) - 100000$

$E(B) = 440\,000$

Pour l'écart-type, on a : $\sigma(B) = \sigma(45X - 100000)$

$\sigma(B) = 45\,\sigma(X)$ par propriété de l'écart-type

2) Données : $E(X)=5,4$ et $\sigma(X)=2$

Soit $aX+b$ la nouvelle loi des notes

a) $E(aX+b) = aE(X)+b = 5,4a+b$

$\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$

$a>0$ donc $\sigma(aX+b) = a\sigma(X)$

$\sigma(aX+b) = 2a$

a et b solutions du système :

$$\begin{cases} 5,4a+b=5 \\ 2a=1,5 \end{cases} \iff \begin{cases} 5,4\times 0,75+b=5 \\ a=\frac{1,5}{2}=0,75 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b=5-5,4\times 0,75=0,95 \\ a=0,75 \end{cases}$$

Capacité 4 ***Déterminer la loi d'une somme de variables aléatoires plus simples, capacité 1 p. 403 du manuel indice***

Agathe lance deux pièces de monnaie, l'une de 1 € et l'autre de 2 €

X est la variable aléatoire qui vaut 1 si elle obtient Pile avec la pièce de 1 € et 0 sinon.

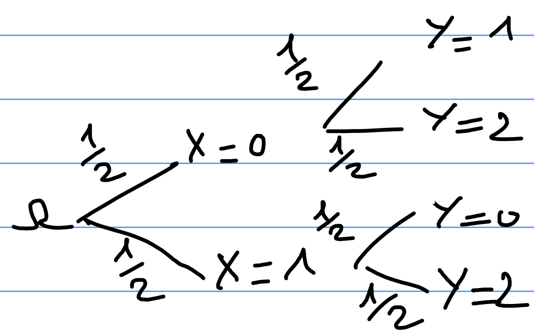
Y est la variable aléatoire qui vaut 2 si elle obtient Pile avec la pièce de 2 € et 0 sinon.

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Compléter le tableau ci-contre et en déduire la loi de probabilité de $X+Y$.

X \ Y	1	2	Loi de X
0	1	2	$\frac{1}{2}$
1	2	3	$\frac{1}{2}$
Loi de Y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

1)



$P(X=0 \text{ et } Y=1)=\frac{1}{4}$

$P(X=0 \text{ et } Y=2)=\frac{1}{4}$

$P(X=1 \text{ et } Y=0)=\frac{1}{4}$

$P(X=1 \text{ et } Y=2)=\frac{1}{4}$

Loi de probabilité de $X+Y$:

$P(X+Y=0) = P(X=0 \text{ et } Y=1) = \frac{1}{4}$

$P(X+Y=2) = P(X=0 \text{ et } Y=2) + P(X=1 \text{ et } Y=1)$

$P(X+Y=2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$P(X+Y=3) = 1 - P(X+Y=0) - P(X+Y=2)$

$P(X+Y=3) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Capacité 4 ***Calculer l'espérance et d'une variable aléatoire avec la propriété de linéarité, capacité 2 p. 403 du manuel Indice***

1. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers fini.

On sait que $\mathbb{E}(X) = 3$ et $\mathbb{E}(Y) = 4$.

Déterminer l'espérance des variables aléatoires :

$X+Y$, $X+Y+1$, $X-Y$, $X+X$, $\frac{1}{3}X+\frac{1}{2}Y$ et $aX+(1-a)Y$ où a est un réel.

2. Soit S_n la variable aléatoire qui représente le nombre de piles obtenus lorsqu'on lance une pièce équilibrée n fois.

a. Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle renvoie une réalisation de S_n :

```
from random import randint

def lancer():
    #renvoie 1 pour pile et 0 pour face (pièce équilibrée)
    return randint(0, 1)

def S(n):
    compteur = 0
    for k in range(n):
        compteur = ..compteur + lancer()
    return compteur
```

b. Déterminer l'espérance de S_n.

1) On considère deux variables aléatoires X et Y telles que:

$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 3+4 = 7$

$E(X+Y+1) = E(X+Y)+1 = 8$

$E(X-Y) = E(X) - E(Y) = 3-4 = -1$

$E(X+X) = E(X) + E(X) = 2\times 3 = 6$

$E\left(\frac{1}{3}X + \frac{1}{2}Y\right) = \frac{1}{3}E(X) + \frac{1}{2}E(Y) = \frac{1}{3}\times 3 + \frac{1}{2}\times 4 = 3$

$E(aX + (1-a)Y) = aE(X) + (1-a)E(Y) = 3a + 4(1-a) = 4-a$

2) $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ où pour tout entier $k \in [\![1;n]\!]$ X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$:

k	0	1
$P(X_1=k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Par linéarité de l'espérance appliquée $n-1$ fois :

$E(X_1 + \dots + X_n) = n\,E(X_1) = n \times \frac{1}{2}$

Capacité 6 Calculer la variance d'une variable aléatoire en l'exprimant comme somme de variables aléatoires indépendantes

1. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers fini.

On sait que $\mathbb{V}(X) = 3$ et $\mathbb{V}(Y) = 4$. ↳ indépendantes

Déterminer la variance des variables aléatoires :

$X+Y, X+Y+1$, $X-Y, X+X$, $\frac{1}{3}X+\frac{1}{2}Y$ et $aX+(1-a)Y$ où a est un réel.

2. Soit S_n la variable aléatoire qui représente le nombre de piles obtenus lorsqu'on lance une pièce équilibrée n fois.

Déterminer la variance de S_n.

! Cette fois les variables aléatoires sont indépendantes.

1) X et Y des variables aléatoires indépendantes

$V(X+Y) = V(X)+V(Y) = 7$

$V(X+Y+1) = V(X) + V(Y+1) = V(X)+V(Y) = 4+3 = 7$

$V(X-Y) = V(X) + V(-Y) = V(X) + (-1)^2 V(Y) = 4+3 = 7$

On admet que si X et Y sont indépendantes alors X et −Y sont indépendantes.

$V(\frac{1}{3}X+\frac{1}{2}Y) = V(\frac{1}{3}X) + V(\frac{1}{2}Y) = \frac{1}{3^2}V(X) + \frac{1}{2^2}V(Y) = \frac{1}{9}\times 3 + \frac{1}{4}\times 4$

$V(\frac{1}{3}X+\frac{1}{2}Y) = \frac{1}{3}+1 = \frac{4}{3}$

$V(aX+(1-a)Y) = V(aX) + V((1-a)Y)$

$= a^2 V(X) + (1-a)^2 V(Y)$

$V(aX+(1-a)Y) = a^2\times 3 + (1-a)^2\times 4 = 7a^2+4-8a$

2) $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ où pour tout entier $k \in [\![1;n]\!]$ X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$

On peut admettre que les X_k avec $k \in [\![1, n]\!]$ sont mutuellement indépendants.

Par récurrence, en appliquant successivement la propriété de la variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes, on obtient :

$$V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$$

avec $V(X_1) = V(X_2) = \dots = V(X_n) = p(1-p) = \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

donc $V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \frac{1}{4} \times n$

nal **Capacité 6** ***Représenter une variable comme somme de variables aléatoires plus simples, capacité 3 p. 405 du manuel Indice***

Extrait du sujet Polynésie J2 Juin 2024.

Un sac opaque contient huit jetons numérotés de 1 à 8, indiscernables au toucher.
À trois reprises, un joueur pioche un jeton dans ce sac, note son numéro, puis le remet dans le sac.
Dans ce contexte, on appelle « tirage » la liste ordonnée des trois numéros obtenus.
Par exemple, si le joueur pioche le jeton numéro 4, puis le jeton numéro 5, puis le jeton numéro 1, alors le tirage correspondant est (4 ; 5 ; 1).

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.

2. a. Déterminer le nombre de tirages sans répétition de numéro.
   b. En déduire le nombre de tirages contenant au moins une répétition de numéro.

1) On a $8^3 = 512$ listes ordonnées avec répétition possible
C'est le nombre de tirages possibles.

2) a) On a $8 \times 7 \times 6 = 336$ listes ordonnées d'éléments pris dans l'ensemble $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ sans répétition.

b) Le nombre de tirages avec au moins une répétition est donc de $8^3 - 8 \times 7 \times 6 = 176$

On note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du premier jeton pioché, X_2 celle égale au numéro du deuxième jeton pioché et X_3 celle égale au numéro du troisième jeton pioché.
Puisqu'il s'agit d'un tirage avec remise, les variables aléatoires X_1, X_2, et X_3 sont indépendantes et suivent la même loi de probabilité.

3) X_1 suit une loi uniforme discrète
$\Omega = \{1;2;3;4;5;6;7;8\}$
Pour tout $k \in \Omega$ on a $P(X_1 = k) = \frac{1}{8}$

4) $E(X_1) = \sum_{k=1}^{8} \frac{1}{8} \times k = \frac{1}{8} \times \sum_{k=1}^{8} k = \frac{1}{\cancel{8}} \times \cancel{8} \times \frac{1+8}{2} = \frac{9}{2}$

On note $S = X_1 + X_2 + X_3$ la variable aléatoire égale à la somme des numéros des trois jetons piochés.

5. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire S.

6. Déterminer $P(S = 24)$.

5) $E(S) = E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)$

X_1, X_2 et X_3 suivent la même loi

$E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = \frac{9}{2}$

donc $E(S) = 3 \times \frac{9}{2} = \frac{27}{2}$

6) $P(S=24) = P((X_1 = 8) \text{ et } (X_2 = 8) \text{ et } (X_3 = 8))$

X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes et suivent la même loi de probabilité

donc $P(S=24) = P(X_1 = 8) \times P(X_2 = 8) \times P(X_3 = 8)$

$P(S=24) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8^3}$

7. Si un joueur obtient une somme supérieure ou égale à 22, alors il gagne un lot.

a. Justifier qu'il existe exactement 10 tirages permettant de gagner un lot.

b. En déduire la probabilité de gagner un lot.

$P(S \geq 22) = P(S=22) + P(S=23) + P(S=24)$

On recherche le nombre de façons de décomposer 22, 23 et 24 comme somme de X_1, X_2 et X_3 (prenant leurs valeurs dans $[\![1;8]\!]$) :

On fait un tableau :

X_1	X_2	X_3	$S = X_1 + X_2 + X_3$
6	8	8	22
8	6	8	22
8	8	6	22
7	7	8	22
7	8	7	22
8	7	7	22
7	8	8	23
8	7	8	23
8	8	7	23
8	8	8	24

On a 10 tirages réalisant l'évènement $S \geq 22$

b) Chaque tirage a une probabilité de $\frac{1}{8^3}$

donc $P(S \geq 22) = 10 \times \frac{1}{8^3} = \frac{10}{512}$

Activité 1 p. 120 Manuel Indice

Jeux de cartes en double

Un joueur tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes, puis tire une seconde carte dans un autre jeu de 32 cartes.

On note X la variable aléatoire qui, au premier tirage, associe un gain de 2 € si la carte tirée est un as, un gain de 1 € si la carte tirée est une carte « habillée » (roi, dame, valet), et rien du tout dans les autres cas.

On note Y la variable aléatoire qui, au second tirage, associe un gain de 1 € si la carte tirée est un pique, et rien du tout dans les autres cas.

On appelle Z la variable aléatoire qui, à chaque double tirage, associe le gain total du joueur.

On peut noter cette variable : $Z = X + Y$.

1 Déterminer les valeurs prises par X, par Y et par Z.

2 Donner la loi de X et la loi de Y.

3 **a.** Exprimer l'événement $\{Z=0\}$ en fonction des événements $\{X=0\}$ et $\{Y=0\}$.

b. En utilisant l'indépendance des deux épreuves, déterminer $P(Z=0)$.

c. Calculer de la même façon $P(Z=3)$.

4 **a.** Déterminer $P(Z=1)$ en exprimant l'événement $\{Z=1\}$ comme réunion de deux événements incompatibles.

b. En déduire $P(Z=\cancel{3}2)$, puis la loi de Z.

5 Calculer l'espérance et la variance des variables X, Y et Z. Que constate-t-on ?

1)

k	2	1	0
$P(X=k)$	$\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$	$\frac{12}{32}=\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

k	1	0
$P(Y=k)$	$1/4$	$3/4$

Lois de X et Y

Valeurs prises par $Z = X+Y$

X \ Y	0	1
0	$0+0=0$	$0+1=1$
1	$1+0=1$	$1+1=2$
2	$2+0=2$	$2+1=3$

3)

$\{Z=0\} = \{X=0 \text{ et } Y=0\}$

or les deux tirages sont indépendants, donc

$P(\{Z=0\}) = P(\{X=0\}) \times P(\{Y=0\})$

$P(\{Z=0\}) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = 3/8$

De même on a :

$$\{Z=3\} = \{X=2 \text{ et } Y=1\}$$

Par indépendance des variables aléatoires X et Y, il vient :

$$P(\{Z=3\}) = P(\{X=2\}) \times P(\{Y=1\})$$

$$\boxed{P(\{Z=3\}) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32}}$$

4) a)

$$\{Z=1\} = \{X=0 \text{ et } Y=1\} \cup \{X=1 \text{ et } Y=0\}$$

Par indépendance des variables aléatoires X et Y :

$$P(\{X=0 \text{ et } Y=1\}) = P(\{X=0\}) \times P(\{Y=1\})$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

et $P(\{X=1 \text{ et } Y=0\}) = P(\{X=1\}) \times P(\{Y=0\})$

donc $P(\{X=1 \text{ et } Y=0\}) = \frac{3}{8} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{32}$

$\{X=0 \text{ et } Y=1\}$ et $\{X=1 \text{ et } Y=0\}$ sont incompatibles, donc :

$$\boxed{P(\{Z=1\}) = \frac{1}{8} + \frac{9}{32} = \frac{13}{32}}$$

De :

$$P(Z=0) + P(Z=1) + P(Z=2) + P(Z=3) = 1$$

on déduit que

$$P(Z=2) = 1 - P(Z=0) - P(Z=1) - P(Z=3)$$

donc

$$P(Z=2) = 1 - \frac{3}{8} - \frac{1}{32} - \frac{13}{32}$$

donc $P(Z=2) = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$

Loi de Z :

k	$P(Z=k)$
0	$3/8 = 12/32$
1	$13/32$
2	$6/32$
3	$\frac{1}{32}$

4) On a $E(X) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

$E(Y) = \frac{1}{4}$

$$E(Z) = \frac{13}{32} + 2 \times \frac{6}{32} + 3 \times \frac{1}{32}$$

$$= \frac{28}{32} = \frac{7}{8}$$

On remarque que :

$E(X) + E(Y) = \frac{5}{8} + \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$

est égal à $E(Z) = E(X+Y) = \frac{7}{8}$

C'est la linéarité de l'espérance.

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

En calculant $V(Z) = V(X+Y)$

on observe que $V(Z) = V(X) + V(Y)$

Activité 2 p. 120 Manuel Indice

Tombola de clés USB

Un sac contient cinq clés USB dont deux clés d'une valeur de 10 € et trois clés d'une valeur de 30 €. À l'issue d'une épreuve sportive, le vainqueur tire au hasard dans ce sac une clé USB puis, sans remettre la clé dans le sac, il tire une seconde clé.

On note X la variable aléatoire qui, au premier tirage associe le prix de la clé obtenue, et Y la variable aléatoire qui, au second tirage, associe le prix de la clé obtenue. On note S la variable aléatoire qui, aux deux tirages, associe la somme des prix des clés gagnées.

1 Quelles sont les valeurs prises par S ?

2 **a.** Déterminer la loi de X.

b. Calculer son espérance et sa variance.

3 **a.** Construire un arbre pondéré modélisant cette expérience aléatoire.

b. Calculer $P(Y = 10)$ à l'aide de l'arbre pondéré.

c. En déduire la loi de probabilité de Y.

d. Calculer l'espérance et la variance de Y.

4 **a.** Calculer $P(S = 20)$, puis $P(S = 60)$.

b. Déterminer la loi de probabilité de S.

c. Calculer l'espérance et la variance de S. Que constate-t-on ?

1) Valeurs possibles pour $S = X + Y$

$X \backslash Y$	10	30
10	$10+10=20$	$10+30=40$
30	$30+10=40$	$30+30=60$

2) a) Loi de X :

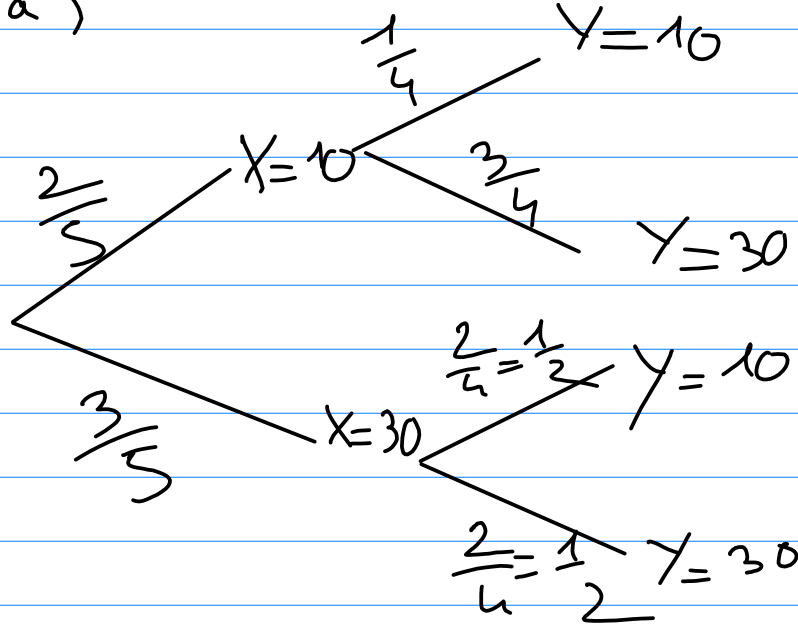
k	10	30
$P(X=k)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

b) $E(X) = 10 \times \frac{2}{5} + 30 \times \frac{3}{5} = \frac{110}{5} = 22$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{5} \times 10^2 + \frac{3}{5} \times 30^2 - 22^2$

$V(X) = 96$

3) a)



X	Y	S=X+Y
10	10	20
10	30	40
30	10	40
30	30	60

b) On applique la formule des probabilités totales pour calculer $P(Y=10)$:

$$P(Y=10) = P(X=10) \times P_{(X=10)}(Y=10) + P(X=30) \times P_{(X=30)}(Y=10)$$

$$P(Y=10) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{4}{10}$$

$$P(Y=10) = \frac{2}{5}$$

c) On en déduit que $P(Y=30) = 1 - P(Y=10) = \frac{3}{5}$

Loi de probabilité de Y :

k	10	30
$P(Y=k)$	2/5	3/5

On remarque que X et Y suivent la même loi ce qui est normal.

On a donc $V(Y) = V(X) = 96$

et $E(Y) = E(X) = 22$

10)

$\{S=20\} = \{X=10 \text{ et } Y=10\}$

donc $P(S=20) = P(X=10) \times P_{(X=10)}(Y=10)$

$P(S=20) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

$\{S=60\} = \{X=30 \text{ et } Y=30\}$

donc $P(S=60) = P(X=30) \times P_{(X=30)}(Y=30)$

$P(S=60) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

On a : $P(S=60) + P(S=20) + P(S=40) = 1$

donc $P(S=40) = 1 - P(S=20) - P(S=60)$

$$= 1 - \frac{1}{10} - \frac{3}{10}$$

$$P(S=40) = \frac{6}{10}$$

Loi de Z :

k	20	40	60
$P(Z=k)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

$$E(Z) = 20 \times \frac{1}{10} + 40 \times \frac{6}{10} + 60 \times \frac{3}{10}$$

$$E(Z) = \frac{260}{10} + \frac{180}{10} = \frac{440}{10} = 44$$

$$V(Z) = 20^2 \times \frac{1}{10} + 40^2 \times \frac{6}{10} + 60^2 \times \frac{3}{10} - (E(Z))^2$$

$$V(Z) = 40 + 960 + 1080 - 44^2 = 144$$

On remarque que :

$$E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2E(X)$$

mais $V(Z) = V(X+Y) = 144$

n'est pas égal à $V(X) + V(Y) = 2 \times 96$

$= 192$

Capacité 7 ***Espérance d'une loi binomiale***

Extrait du sujet Asie J1 juin 2024.

Dans la revue *Lancet Public Health*, les chercheurs affirment qu'au 11 mai 2020, 5,7 % des adultes français avaient déjà été infectés par la COVID 19.

Source : https ://www.thelancet.com/journals/lanpub/article/PIIS2468-2667 (21) 00064-5/fulltext

~~On se servira de cette donnée pour les parties A et B de cet exercice~~.

1. On prélève un individu dans la population française adulte au 11 mai 2020.

   On note I l'évènement : « l'adulte a déjà été infecté par la COVID 19 »

   Quelle est la probabilité que cet individu prélevé ait déjà été infecté par la COVID 19?

$P(I) = 0,057$

2. On prélève un échantillon de 100 personnes de la population supposées choisies de façon indépendante les unes des autres.

   On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.

   On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes ayant déjà été infectées.

   a. Justifiez que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

Le choix d'un échantillon de 100 personnes est assimilé à un tirage avec remise. On peut donc considérer que les choix de chaque personne sont indépendants et qu'on a une répétition de 100 expériences de Bernoulli, identiques et indépendantes, dont le succès " la personne choisie est infectée " a une probabilité de $P(I) = 0,057$.

La variable X comptant le nombre de succès dans cet échantillon suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,057$.

b) D'après une propriété du cours l'espérance d'une loi binomiale de paramètres n et p est

$n \times p$

Donc $E(X) = n \times p = 100 \times 0{,}057 = 5{,}7$

Sur un grand nombre d'échantillons de taille 100, il est très probable que le nombre moyen de contaminés par échantillon soit proche de 5,7.

c) La probabilité qu'il n'y ait aucune personne infectée est :

$$P(X=0) = (1-p)^{100} = 0{,}943^{100}$$

$$P(X=0) \simeq 0{,}0029$$

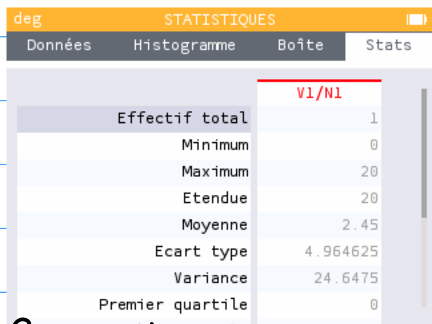
Capacité 9 ***Utiliser la somme et la moyenne d'un échantillon de taille n, capacité 4 p. 405 du manuel Indice***

Chaque jour, Erno résout une fois le Rubik's Cube. X est l'écart, en secondes, entre le temps qu'il réalise et son meilleur temps. Voici la loi de probabilité de X :

k	0	1	2	10	20
$\mathbb{P}(X=k)$	0,5	0,25	0,1	0,1	0,05

1. Déterminer l'espérance et l'écart-type de l'écart quotidien moyen sur une dizaine de jours.
2. Reprendre les calculs précédents mais sur 20 puis trente puis cinquante jours. Que peut-on remarquer?

1)



$E(X) = 2,45$ $V(X) \approx 24,6475$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Pour tout entier $n \geq 1$

soit $M_n = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n$

où $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est un échantillon de la loi suivie par X

D'après une propriété du cours, on a.

$E(M_n) = E(X)$ et $V(M_n) = \dfrac{V(X)}{n}$

2)

n	$E(M_n) = E(X)$	$V(M_n) = \dfrac{V(X)}{n}$
10	2,45	$\approx$ 2,46475
20	2,45	$\approx$ 1,2324
30	2,45	$\approx$ 0,8216
50	2,45	$\approx$ 0,4930

On peut remarquer que la variance et donc la fluctuation d'échantillonnage diminue avec la taille de l'échantillon.