

Une intégrale de Wallis est une intégrale faisant intervenir une puissance entière de la fonction cosinus (ou sinus). Les intégrales de Wallis ont été introduites par **John Wallis (1616 – 1703)**, notamment pour développer le nombre π (qui est un nombre irrationnel) comme limite d'un produit de nombres rationnels. On doit aussi à John Wallis le symbole ∞ pour représenter l'infini.

Pour tout entier $n \geq 0$, on définit l'intégrale W_n par :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) \, dx$$

On définit ainsi la suite $(W_n)_{n \geq 0}$ des intégrales de Wallis.

1 Convergence de la suite des intégrales de Wallis

1. Démontrer que $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$.

2. a. Soit n un entier naturel, démontrer que pour tout réel $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$\cos^{n+1}(x) \leq \cos^n(x)$$

b. En déduire que la suite $(W_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

3. Démontrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$0 \leq W_n$$

4. Déduire des questions précédentes que la suite $(W_n)_{n \geq 0}$ converge vers une limite ℓ et justifier que :

$$0 \leq \ell \leq \frac{\pi}{2}$$

5. Dans cette question on va démontrer que $\ell = 0$ à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.

On suppose donc que $0 < \ell \leq \frac{\pi}{2}$ et on va démontrer qu'on aboutit alors à une contradiction.

a. Soit n un entier naturel, citer la propriété des intégrales qui permet d'écrire :

$$W_n = \int_0^{\frac{\ell}{2}} \cos^n(x) \, dx + \int_{\frac{\ell}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) \, dx$$

b. Soit n un entier naturel, démontrer que pour tout réel $x \in \left[\frac{\ell}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$\cos^n(x) \leq \cos^n\left(\frac{\ell}{2}\right)$$

c. En déduire que pour tout entier naturel n , on a :

$$0 \leq W_n \leq \frac{\ell}{2} + \cos^n\left(\frac{\ell}{2}\right) \times \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\ell}{2}\right) \quad (1)$$

- d. Démontrer que si on suppose que $0 < \ell \leq \frac{\pi}{2}$ alors $\cos^n\left(\frac{\ell}{2}\right)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
- e. En passant à la limite dans l'inégalité (1) de la question 5. c., démontrer que si on suppose que $0 < \ell \leq \frac{\pi}{2}$ alors on a :

$$0 \leq \ell \leq \frac{\ell}{2}$$

- f. En déduire que si on suppose que $0 < \ell \leq \frac{\pi}{2}$ alors on aboutit à une contradiction.
- g. Formuler la conclusion du raisonnement par l'absurde qui permet d'affirmer que la limite ℓ de la suite $(W_n)_{n \geq 0}$ est $\ell = 0$.

2 Relation de récurrence entre W_n et W_{n-1}

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \sin(x) \times \cos^n(x)$$

f_n est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ comme produit de fonctions dérivables.

1. Soit un entier $n \geq 1$ un entier naturel, démontrer que pour tout réel $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$f'_n(x) = (n+1) \cos^{n+1}(x) - n \cos^{n-1}(x) \quad (2)$$

2. En intégrant l'égalité (2) de la question précédente, démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$W_{n+1} = \frac{n}{n+1} W_{n-1}$$

3. Compléter le programme ci-dessous pour que `wallis(n)` renvoie la liste des valeurs des termes de rang 0 à n inclus de la suite des intégrales de Wallis. On utilisera la relation de récurrence précédente.

```
from math import pi

def liste_wallis(n):
    # liste des intégrales de Wallis
    walliste = [pi/2, 1]
    for k in range(2, n + 1):
        # calcul de l'intégrale de Wallis au rang k
        wk = ....
        walliste.append(...)
    return walliste
```

On donne un exemple d'exécution pour la liste des termes de rang 0 à 4 inclus :

```
>>> liste_wallis(5)
[1.5707963267948966, 1, 0.7853981633974483, 0.6666666666666666,
0.5890486225480862, 0.5333333333333333]
```

3 Expression de π comme limite d'un produit de nombres rationnels

1. Démontrer par récurrence que pour entier $p \geq 1$, on a :

$$W_{2p} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{2k-1}{2k} \times \dots \times \frac{2p-1}{2p}$$

On notera désormais :

$$W_{2p} = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^p \frac{2k-1}{2k}$$

$\prod_{k=1}^p \frac{2k-1}{2k}$ représente le produit de tous les entiers $\frac{2k-1}{2k}$ pour k variant de 1 à p . Cette notation est l'analogue pour représenter un produit de la notation avec $\sum$ pour représenter une somme.

2. On admet que pour tout entier $p \geq 1$, on a ;

$$W_{2p+1} = \prod_{k=1}^p \frac{2k}{2k+1}$$

Démontrer que pour tout entier $p \geq 1$, on a :

$$\frac{\frac{\pi}{2} W_{2p+1}}{W_{2p}} = \prod_{k=1}^p \frac{4k^2}{4k^2-1}$$

3. On rappelle que la suite $(W_n)_{n \geq 0}$ est décroissante et que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$W_{n+1} = \frac{n}{n+1} W_{n-1}$$

a. Démontrer que pour tout entier $p \geq 1$, on a :

$$\frac{2p+1}{2p+2} = \frac{W_{2p+2}}{W_{2p}} \leq \frac{W_{2p+1}}{W_{2p}} \leq 1$$

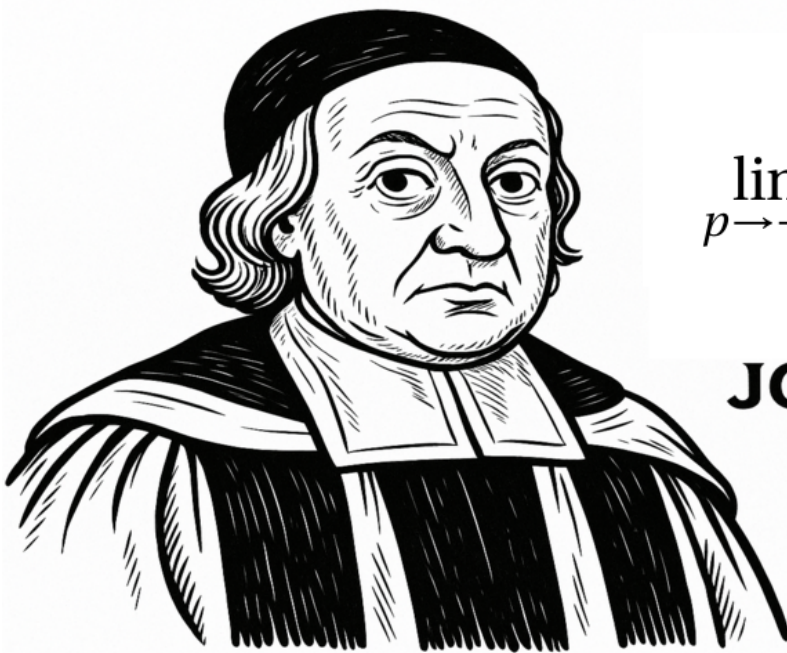
b. En déduire que :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{W_{2p+1}}{W_{2p}} = 1$$

4. Démontrer que :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} 2 \prod_{k=1}^p \frac{4k^2}{4k^2-1} = \pi$$

Ainsi on a exprimé π comme la limite d'un produit de quotients d'entiers c'est-à-dire de nombres rationnels.



$$\lim_{p \rightarrow +\infty} 2 \prod_{k=1}^p \frac{4k^2}{4k^2 - 1} = \pi$$

JOHN WALLIS
(1616-1703)