*Énoncés tapés par les collègues de l'APMEP à partir des sujets originaux.*

## Exercice 1 *Amérique du Nord mai 2025 J1*

Pour accéder au réseau privé d'une entreprise depuis l'extérieur, les connexions des employés transitent aléatoirement via trois serveurs distants différents, notés A, B et C. Ces serveurs ont des caractéristiques techniques différentes et les connexions se répartissent de la manière suivante :

- 25 % des connexions transitent via le serveur A;
- 15 % des connexions transitent via le serveur B;
- le reste des connexions s'effectue via le serveur C.

Les connexions à distance sont parfois instables et, lors du fonctionnement normal des serveurs, les utilisateurs peuvent subir des déconnexions pour différentes raisons (saturation des serveurs, débit internet insuffisant, attaques malveillantes, mises à jour de logiciels, etc.).

On dira qu'une connexion est stable si l'utilisateur ne subit pas de déconnexion après son identification aux serveurs. L'équipe de maintenance informatique a observé statistiquement que, dans le cadre d'un fonctionnement habituel des serveurs :

- 90 % des connexions via le serveur A sont stables;
- 80 % des connexions via le serveur B sont stables;
- 85 % des connexions via le serveur C sont stables.

Les parties **A** et **B** sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent être traitées séparément.

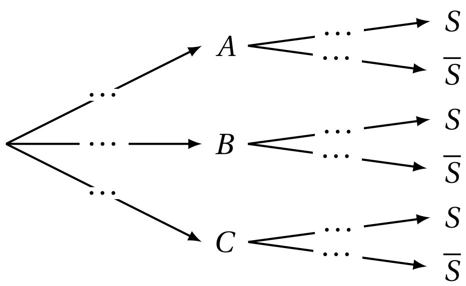
**Partie A**

On s'intéresse au hasard à l'état d'une connexion effectuée par un employé de l'entreprise. On considère les évènements suivants :

- $A$ : « La connexion s'est effectuée via le serveur A »;
- $B$ : « La connexion s'est effectuée via le serveur B »;
- $C$ : « La connexion s'est effectuée via le serveur C »;
- $S$ : « La connexion est stable ».

On note $\overline{S}$ l'évènement contraire de l'évènement $S$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation de l'énoncé.



2. Démontrer que la probabilité que la connexion soit stable et passe par le serveur B est égale à $0,12$.

3. Calculer la probabilité $P\left(C \cap \overline{S}\right)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Démontrer que la probabilité de l'évènement $S$ est $P(S) = 0,855$.

5. On suppose désormais que la connexion est stable.

   Calculer la probabilité que la connexion ait eu lieu depuis le serveur B.

   *On donnera la valeur arrondie au millième.*

**Partie B**

D'après la **partie A**, la probabilité qu'une connexion soit **instable** est égale à $0,145$.

1. Dans le but de détecter les dysfonctionnements de serveurs, on étudie un échantillon de 50 connexions au réseau, ces connexions étant choisies au hasard. On suppose que le nombre de connexions est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise.

   On désigne par $X$ la variable aléatoire égale au nombre de connexions instables au réseau de l'entreprise, dans cet échantillon de 50 connexions.

   **a.** On admet que la variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

   **b.** Donner la probabilité qu'au plus huit connexions soient instables. *On donnera la valeur arrondie au millième.*

2. Dans cette question, on constitue désormais un échantillon de $n$ connexions, toujours dans les mêmes conditions, où $n$ désigne un entier naturel strictement positif. On note $X_n$ la variable aléatoire égale aux nombres de connexions instables et on admet que $X_n$ suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $0,145$.

   **a.** Donner l'expression en fonction de $n$ de la probabilité $p_n$ qu'au moins une connexion de cet échantillon soit instable.

   **b.** Déterminer, en justifiant, la plus petite valeur de l'entier naturel $n$ telle que la probabilité $p_n$ est supérieure ou égale à $0,99$.

3. On s'intéresse à la variable aléatoire $F_n$ égale à la fréquence de connexions instables dans un échantillon de $n$ connexions, où $n$ désigne un entier naturel strictement positif.

   On a donc $F_n = \dfrac{X_n}{n}$, où $X_n$ est la variable aléatoire définie à la question **2.**

   **a.** Calculer l'espérance $E\left(F_n\right)$.
   On admet que $V\left(F_n\right) = \dfrac{0,123975}{n}$.

   **b.** Vérifier que : $P\left(|F_n - 0,145| \geqslant 0,1\right) \leqslant \dfrac{12,5}{n}$

   **c.** Un responsable de l'entreprise étudie un échantillon de 1 000 connexions et constate que pour cet échantillon $F_{1000} = 0,3$. Il soupçonne un dysfonctionnement des serveurs. A-t-il raison ?

## **Exercice 2** *Métropole J2 2024 dévoilé*

**Partie A**

Une société de vente en ligne procède à une étude du niveau de fidélité de ses clients. Elle définit pour cela comme « régulier » un client qui a fait des achats chaque année depuis trois ans.
Elle constate que 60 % de ses clients sont des clients réguliers, et que parmi eux, 47 % ont acheté la carte de fidélité.
Par ailleurs, parmi l'ensemble de tous les clients de la société, 38 % ont acheté la carte de fidélité.
On interroge au hasard un client et on considère les évènements suivants :

- $R$ : « le client est un client régulier » ;
- $F$ : « le client a acheté la carte de fidélité ».

Pour un évènement $E$ quelconque, on note $\overline{E}$ son évènement contraire et $P(E)$ sa probabilité.

**1.**

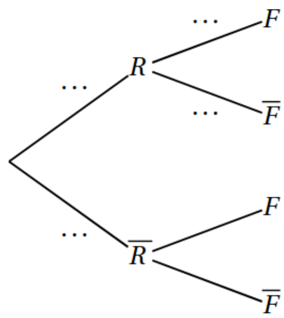
**a.** Reproduire l'arbre ci-contre et compléter les pointillés.

**b.** Calculer la probabilité que le client interrogé soit un client régulier et qu'il ait acheté la carte de fidélité.

**c.** Déterminer la probabilité que le client ait acheté la carte de fidélité sachant que ce n'est pas un client régulier.

**d.** Le directeur du service des ventes affirme que parmi les clients qui ont acheté la carte de fidélité, plus de 80 % sont des clients réguliers.

Cette affirmation est-elle exacte ? Justifier.




**2.** On choisit un échantillon de 20 clients de la société sélectionnés de manière indépendante. On suppose que ce choix s'assimile à un tirage avec remise.

On note $X$ la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 20 clients associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux. On rappelle que $P(F) = 0,38$.

Les valeurs des probabilités demandées seront arrondies à $10^{-3}$ près.

**a.** Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire $X$ ? Justifier.

**b.** Déterminer la probabilité qu'au moins 5 clients aient acheté la carte de fidélité dans un échantillon de 20.

**Partie B**

La société demande à un institut de sondage de faire une enquête sur le profil de ses clients réguliers. L'institut a élaboré un questionnaire en ligne constitué d'un nombre variable de questions.
On choisit au hasard un échantillon de 1 000 clients réguliers, à qui le questionnaire est proposé. On considère que ces 1 000 clients répondent.

- Pour les remercier, la société offre un bon d'achat à chacun des clients de l'échantillon. Le montant de ce bon d'achat dépend du nombre de questions posées au client.
- La société souhaite récompenser particulièrement les clients de l'échantillon qui ont acheté une carte de fidélité et, en plus du bon d'achat, offre à chacun d'eux une prime d'un montant de 50 euros versée sur la carte de fidélité.

On note $Y_1$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients réguliers, associe le total, en euros, des montants du bon d'achat des 1000 clients.
On admet que son espérance $E(Y_1)$ est égale à 30 000 et que sa variance $V(Y_1)$ est égale à 100 000.
On note $X_2$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients réguliers, associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux, et on note $Y_2$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients, associe le total, en euros, des montants de la prime de fidélité versée.
On admet que $X_2$ suit la loi binomiale de paramètres 1 000 et 0,47 et que $Y_2 = 50X_2$.

1. Calculer l'espérance $E(X_2)$ de la variable $X_2$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

On note $Y = Y_1 + Y_2$ la variable aléatoire égale au total général, en euros, des montants offerts (bon d'achat et prime de fidélité) aux 1 000 clients. On admet que les variables aléatoires $Y_1$ et $Y_2$ sont indépendantes.
On note $Z$ la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{Y}{1\ 000}$.

2. Préciser ce que modélise la variable $Z$ dans le contexte de l'exercice.

   Vérifier que son espérance $E(Z)$ est égale à $53,5$ et que sa variance $V(Z)$ est égale à 0,722 75.

3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, vérifier que la probabilité que $Z$ soit strictement compris entre $51,7$ euros et $55,3$ euros est supérieure à $0,75$.